

Température d'équilibre d'un système

(Du bon usage des analogies)

Par Pascal Rebetez

Août 2009

Position du problème

Considérons un système isolé constitué d'un certain nombre de corps dont les masses, les températures initiales et les matériaux sont quelconques et connus. On met en contact ces différents corps qui vont par conséquent échanger de l'énergie thermique, jusqu'à ce que l'équilibre thermique du système soit atteint. Tous les corps auront alors la même température, appelée température d'équilibre et ils seront chacun dans un certain état physique, solide, liquide ou gazeux.

La question qui nous intéresse dans cette situation est la suivante : est-il possible de calculer cette température d'équilibre pour un nombre arbitraire de corps ? La réponse est affirmative et nous allons la justifier dans ce travail en exploitant une analogie empruntée à l'hydrostatique. Cette analogie nous permettra en outre de donner la méthode pour calculer cette température d'équilibre.

Relations calorimétriques

Si un corps de masse m et de température initiale T_0 échange une quantité d'énergie thermique Q avec l'extérieur, deux cas de figure se présentent :

- sa température initiale est différente de ses températures de changement d'état et varie jusqu'à une température finale T selon la relation $Q = cm(T - T_0)$, où c est la capacité calorifique massique du matériau, en $J/(kg \cdot ^\circ C)$.
- sa température initiale est égale à l'une de ses températures de changement d'état, son état change et la quantité d'énergie thermique qu'il doit échanger pour achever ce changement d'état est donnée par $Q = Lm$ où L est la chaleur latente du changement d'état, en J/kg .

Principe 0 de la thermodynamique

Lorsqu'un corps chaud est mis en contact avec un corps froid, le premier se refroidit et le deuxième se réchauffe, ceci jusqu'à ce que leurs températures deviennent identiques. On dit alors que ces deux corps sont en équilibre thermique.

On interprète cette situation comme le résultat d'un transfert d'énergie thermique du corps chaud vers le corps froid, ce transfert prenant fin lorsque les deux corps sont en équilibre thermique.

Analogie hydrostatique et correspondances avec la thermostatique

Il existe en hydrostatique une situation tout à fait analogue à celle que l'on rencontre en thermostatique, lors d'échanges d'énergie thermique. En effet, le transfert d'énergie thermique entre deux corps à températures différentes, est comparable à la circulation du liquide entre deux vases communicants dans lesquels les niveaux sont différents. Dans cette comparaison :

- l'analogue d'un corps est un récipient
- l'analogue de la température du corps est le niveau du liquide dans le récipient
- l'analogue de la quantité d'énergie thermique échangée entre deux corps à température différentes, est le volume du liquide échangé entre deux récipients communicants, dont les niveaux du liquide qu'ils contiennent sont différents.

Les relations calorimétriques mentionnées plus haut spécifient que thermiquement, un corps est caractérisé par :

- sa masse m
- les capacités calorifiques massiques du matériau dont il est constitué, dans les états solide c_S , liquide c_L et gazeux c_G
- les chaleurs latentes de fusion L_F et de vaporisation L_V du matériau dont il est constitué
- les deux températures de changement d'état du matériau dont il est constitué, T_F et T_V pour la fusion et la vaporisation, respectivement.

Pour visualiser et réaliser expérimentalement cette analogie hydrostatique, il faut des récipients dont les caractéristiques géométriques représentent chacune de ces caractéristiques thermiques. La figure ci-dessous montre la forme d'un récipient qui satisfait cette exigence (fig. 1).

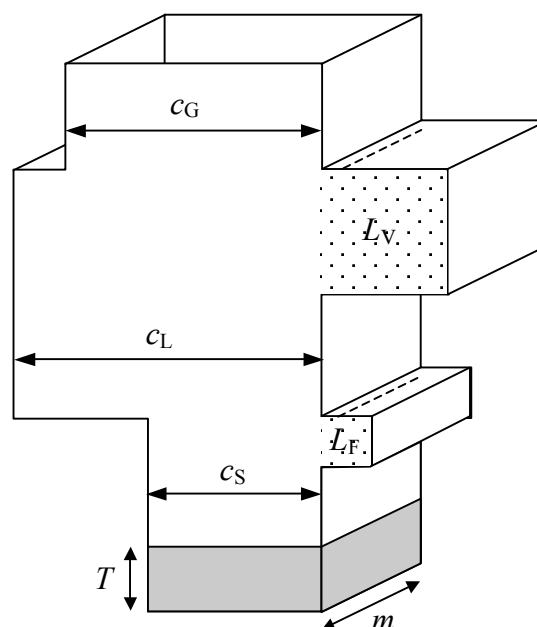
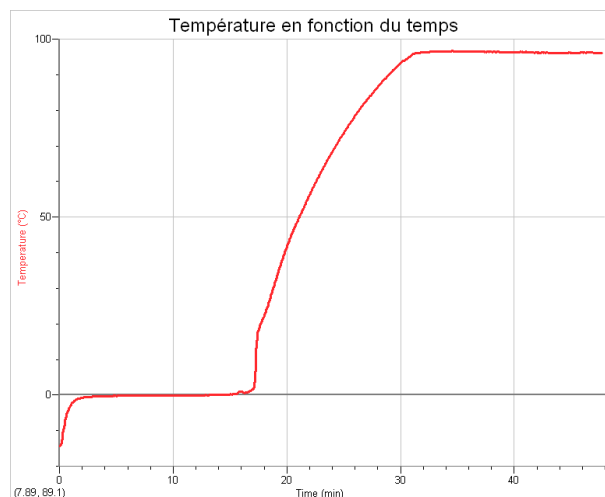


Figure 1 : récipient dont les caractéristiques géométriques représentent chacune des caractéristiques thermiques

Ce récipient est constitué de trois tronçons ayant la forme de prismes droits de base rectangulaire (cette base étant dans un plan horizontal), disposés les uns au-dessus des autres. L'extrémité supérieure des deux premiers tronçons (en partant du bas), communique avec un vase d'expansion de section carrée (cette section est dans un plan vertical).

- L'une des dimensions est la même pour les trois sections horizontales. Celle-ci représente la masse du corps.
- La deuxième dimension de la section horizontale du premier tronçon, représente la capacité calorifique massique du matériau à l'état solide.
- La deuxième dimension de la section horizontale du deuxième tronçon, représente la capacité calorifique massique du matériau à l'état liquide.
- La deuxième dimension de la section horizontale du troisième tronçon, représente la capacité calorifique massique du matériau à l'état gazeux.
- L'aire de la section carrée du premier vase d'expansion (en partant du bas), représente la chaleur latente de fusion du matériau.
- L'aire de la section carrée du deuxième vase d'expansion, représente la chaleur latente de vaporisation du matériau.
- Le niveau du liquide dans un tel récipient, qui échange un certain volume de liquide avec l'extérieur (un autre récipient de ce genre), évolue de manière comparable à la température d'un corps qui échange de l'énergie thermique avec l'extérieur (un autre corps).

Le graphique ci-dessous rappelle l'évolution de cette température en fonction de la quantité d'énergie thermique reçue et fait clairement apparaître les paliers de température qui ont lieu lorsque le corps (ici de l'eau) change d'état.



- L'évolution de la température lorsque celle-ci est comprise entre deux températures de changement d'état, correspond à l'évolution du niveau du liquide entre deux vases d'expansion.
- Un palier de température lors d'un changement d'état, alors que le corps continue d'échanger de l'énergie thermique avec l'extérieur, correspond à la stagnation du niveau du liquide lorsque celui-ci atteint un vase d'expansion et se déverse dans ce dernier, alors que le récipient continue d'échanger du liquide avec l'extérieur.
- La variation de la température après l'achèvement d'un changement d'état correspond à la variation du niveau du liquide une fois un vase d'expansion rempli ou vidé.

Il faut donc s'arranger techniquement pour que lors d'une montée du liquide dans le récipient, un vase d'expansion se remplisse avant le tronçon qui lui est immédiatement supérieur et que lors d'une descente du liquide dans le récipient, un vase d'expansion se vide avant le tronçon qui lui est immédiatement inférieur.

Le tableau ci-dessous récapitule les correspondances de cette analogie :

		THERMOSTATIQUE			HYDROSTATIQUE		
GRANDEURS	Grandeur	Symbole	Unité	Grandeur	Symbole	Unité	
	Quantité d'énergie thermique échangée	Q	J	Volume de liquide échangé	V	m^3	
	Capacité calorifique massique	c	$J/(kg \cdot ^\circ C)$	Longueur	a	m	
	Masse	m	kg	Largeur	b	m	
	Température	T	$^\circ C$	Hauteur	h	m	
	Chaleur latente	L	J/kg	Superficie	S	m^2	
PRINCIPES	Principe 0 de la thermodynamique			Principe des vases communicants			

Méthode pour déterminer la température d'équilibre

Nous allons maintenant exploiter l'analogie hydrostatique pour expliciter la méthode permettant de déterminer la température d'équilibre du système. La correspondance hydrostatique de cette question s'exprime ainsi : *étant donné un nombre quelconque de récipients initialement séparés les uns des autres et contenant chacun un liquide (le même pour tous) jusqu'à un certain niveau, quel sera le niveau d'équilibre de tous ces récipients une fois mis en communication ?* (fig. 2).

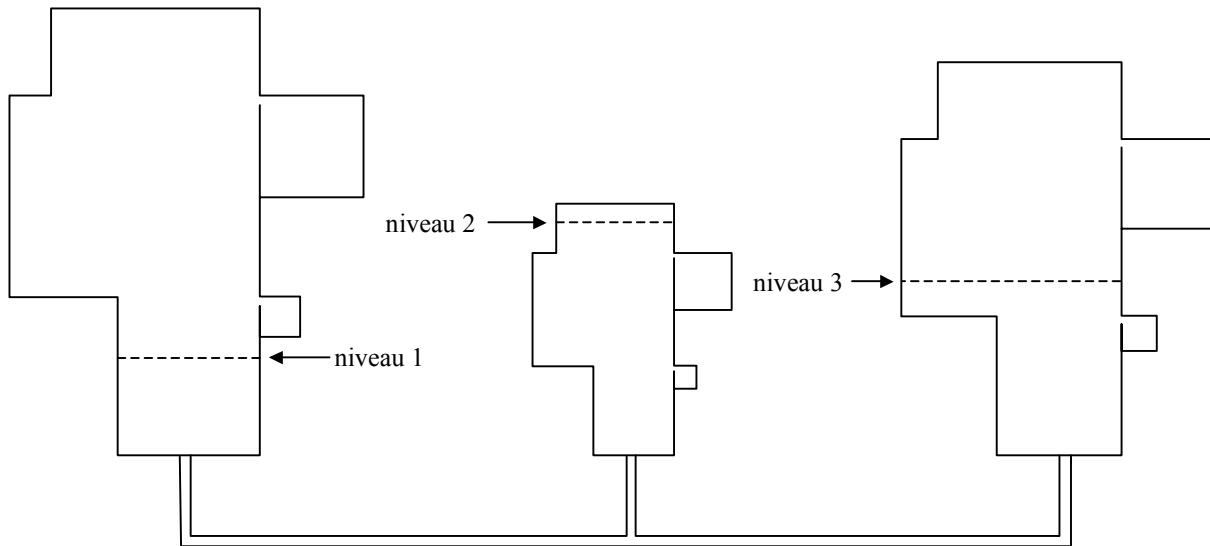


Figure 2 : trois récipients séparés contenant chacun un liquide jusqu'à un certain niveau

Nous allons désormais raisonner dans la situation hydrostatique avec des récipients ayant la forme illustrée plus haut puis une fois la solution trouvée, il suffira de la transposer à la situation thermostatique à l'aide des correspondances récapitulées dans le tableau ci-dessus.

Appliquons un principe de conservation dans cette situation, celui du volume total du liquide contenu dans ces différents récipients (dont le nombre est noté n) ; ce volume est le même avant de mettre les récipients en communication, qu'une fois les récipients mis en communication et le niveau d'équilibre atteint (fig. 3).

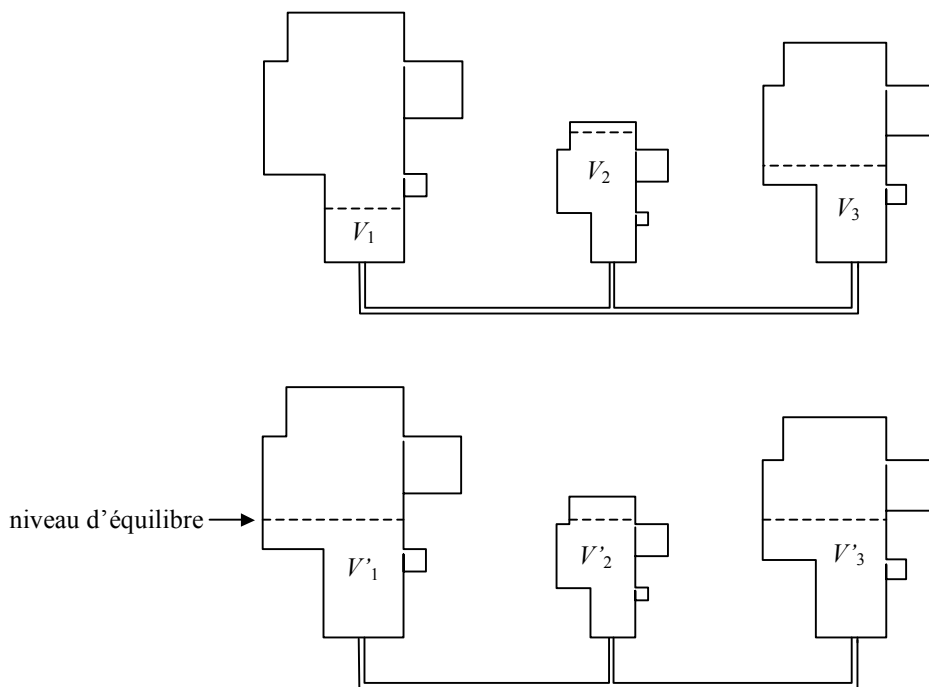


Figure 3 : la conservation du volume total implique $V_1 + V_2 + V_3 = V'_1 + V'_2 + V'_3$

Nous savons, en considérant la pression hydrostatique dans chacun des récipients et dans un même plan horizontal, que le niveau d'équilibre sera situé entre le plus bas et le plus élevé des niveaux initiaux parmi tous les récipients (fig. 4).

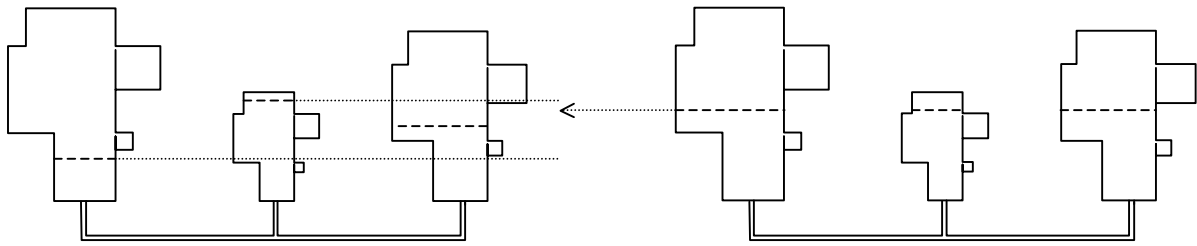


Figure 4 : le niveau d'équilibre sera situé entre le plus bas et le plus élevé des niveaux initiaux

Nous considérons le plus bas des niveaux initiaux, que nous notons h_{\min} et le volume de liquide situé au-dessus de celui-ci dans chacun des récipients, que nous appelons **volume excédentaire** (V_e) dans chaque récipient (fig. 5).

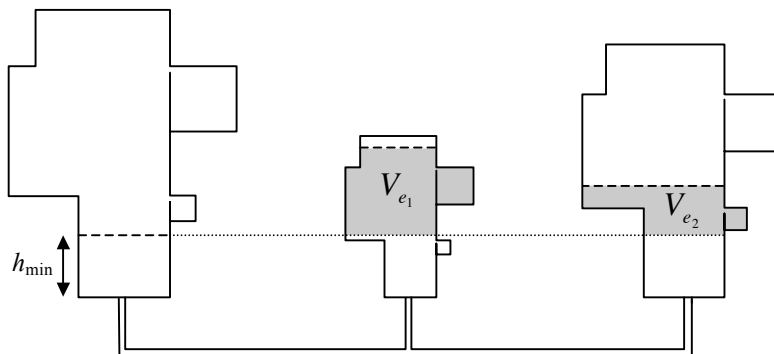


Figure 5 : volume excédentaire dans chaque récipient

La somme de ces volumes excédentaires, que nous notons $\sum_{\text{récipients}} V_e$, se redistribue dans tous les récipients une fois ceux-ci en communication, de sorte à égaliser les niveaux de tous les récipients. Il s'agit maintenant de trouver une méthode pour répartir ce volume $\sum_{\text{récipients}} V_e$ entre tous les récipients, de sorte à augmenter le niveau de chacun de la même hauteur. Voici cette méthode :

On enlève dans chaque récipient son volume excédentaire, le niveau y est ainsi égal à h_{\min} (fig. 6).

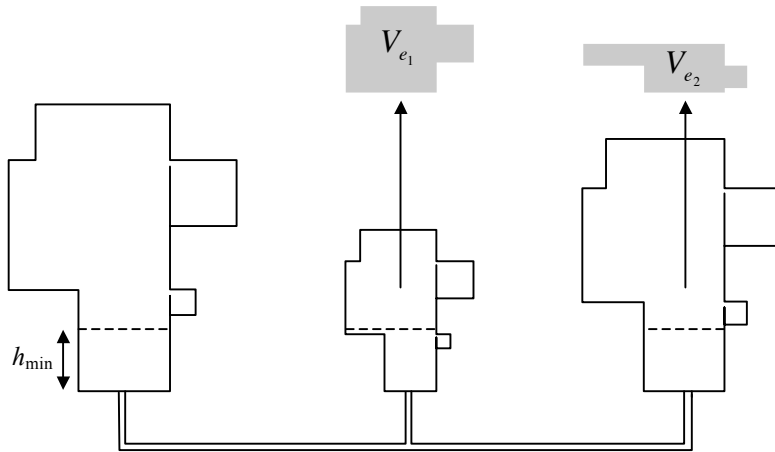


Figure 6 : On enlève dans chaque récipient son volume excédentaire, le niveau y est ainsi égal à h_{\min}

On considère parmi les $2n$ vases d'expansion, celui (dont le volume est noté V_v et le niveau h_v) dont le niveau h_v est le plus proche de h_{\min} (fig. 7) et l'on calcule pour chaque récipient, le volume de liquide à lui ajouter pour élever son niveau h_{\min} jusqu'à h_v .

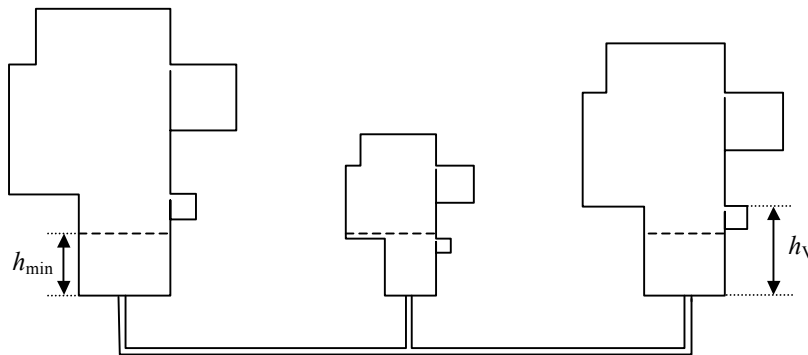


Figure 7 : vase d'expansion dont le niveau h_v est le plus proche de h_{\min}

Nous appelons ce volume à ajouter, le **volume déficitaire** (V_d) de chaque récipient. Nous notons $\sum_{\text{récipients}} V_d$, la somme des volumes déficitaires (fig. 8).

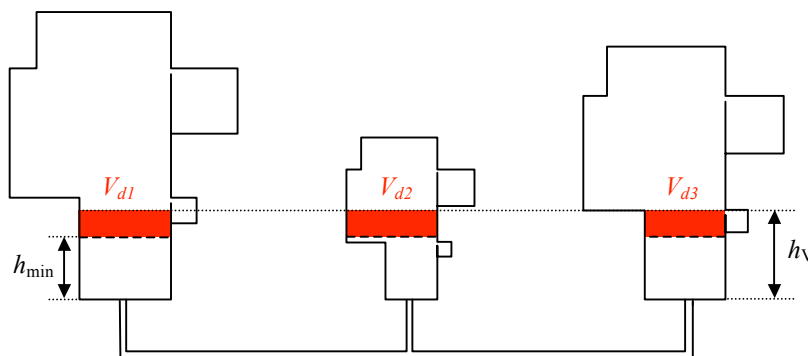


Figure 8 : volume déficitaire de chaque récipient

Plusieurs cas de figure se présentent alors :

$$a) \sum_{\text{récipients}} V_e < \sum_{\text{récipients}} V_d$$

Dans ce cas, le niveau d'équilibre noté h^* est inférieur à celui du vase d'expansion le plus proche, h_v (fig. 9).

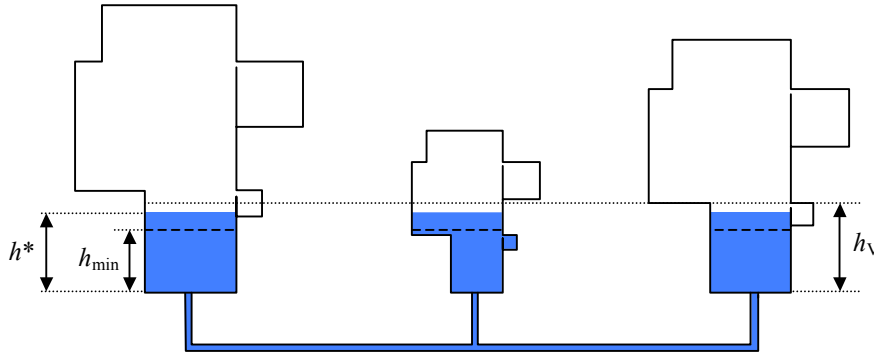


Figure 9 : le niveau d'équilibre h^* est inférieur à celui du vase d'expansion le plus proche, h_v

On trouve h^* en posant :

$$A_{1,i_1} y + A_{2,i_2} y + \dots + A_{n,i_n} y = \sum_{\text{récipients}} V_e$$

Où A_{1,i_1} est l'aire de la section (horizontale) du $i_1^{\text{ème}}$ tronçon (où $i_1 = 1, 2$ ou 3) dans lequel se trouve h_{\min} dans le récipient 1 et $y = h^* - h_{\min}$. L'équation ci-dessus donne :

$$h^* = h_{\min} + \frac{\sum_{\text{récipients}} V_e}{A_{1,i_1} + A_{2,i_2} + \dots + A_{n,i_n}} < h_v$$

$$b) \sum_{\text{récipients}} V_d \leq \sum_{\text{récipients}} V_e \leq \sum_{\text{récipients}} V_d + V_v$$

Dans ce cas, la somme des volumes excédentaires permet de remplir partiellement ou exactement le vase d'expansion (fig. 10).

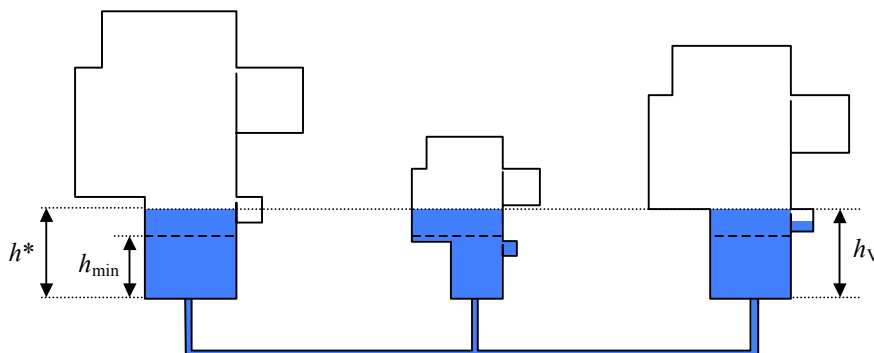


Figure 10 : la somme des volumes excédentaires permet de remplir partiellement ou exactement le vase d'expansion le plus proche et $h^* = h_v$

Le niveau d'équilibre est dans ce cas égal au niveau du vase d'expansion :

$$h^* = h_v$$

c)
$$\sum_{\text{récipients}} V_d + V_v < \sum_{\text{récipients}} V_e$$

Dans ce cas, la somme des volumes excédentaires permet de remplir entièrement le vase d'expansion en laissant un **volume résiduel**, noté V_r où $V_r = \sum_{\text{récipients}} V_e - \left(\sum_{\text{récipients}} V_d + V_v \right)$, à répartir dans les n récipients et ainsi élever le niveau dans chacun de ceux-ci d'une certaine et même hauteur au-dessus du niveau du vase d'expansion (fig. 11).

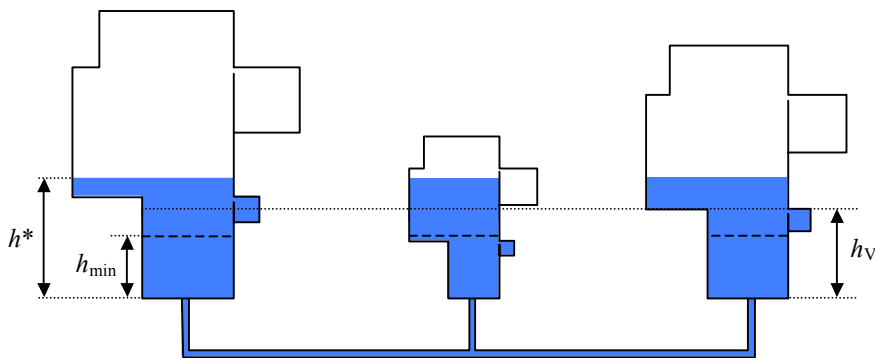


Figure 11 : la somme des volumes excédentaires permet de remplir entièrement le vase d'expansion le plus proche en laissant un volume résiduel à répartir dans les n récipients et ainsi élever le niveau dans chacun de ceux-ci d'une certaine et même hauteur au-dessus du niveau de ce vase d'expansion. Le niveau d'équilibre h^* est alors le niveau d'équilibre final recherché.

Pour déterminer cette élévation de niveau dans les récipients, on répète l'étape a) ci-dessus et éventuellement certaines des étapes b) et c) avec le volume résiduel V_r (on substitue dans ces étapes, $\sum_{\text{récipients}} V_e$ par V_r et h_{\min} par le niveau du vase d'expansion qui lui est immédiatement supérieur). Le remplissage de ces récipients prend fin lorsque l'on a réparti la totalité de la somme des volumes excédentaires $\sum_{\text{récipients}} V_e$ dans les n récipients, selon la méthode décrite par ces trois étapes. Le niveau d'équilibre h^* est alors le niveau d'équilibre final recherché.

La correspondance thermostatique de cette méthode est la suivante :

- conservation de $V \leftrightarrow$ conservation de Q
- $h_{\min}, h_{\max} \leftrightarrow T_{\min}, T_{\max}$
- $h^* \leftrightarrow T^*$
- $h_{\min} < h^* < h_{\max} \leftrightarrow T_{\min} < T^* < T_{\max}$

- $\sum_{\text{récipients}} V_e \leftrightarrow \sum_{\text{corps}} Q_e$
- $\sum_{\text{récipients}} V_d \leftrightarrow \sum_{\text{corps}} Q_d$
- A_{1,i_1} où $i_1 = 1, 2$ ou $3 \leftrightarrow c_{1,i_1} m$ où $i_1 = S$ (solide), L (liquide) ou G (gazeux)
- $h_v \leftrightarrow T_{\text{changement d'état}}$
- $V_v \leftrightarrow Lm$
- $V_r \leftrightarrow Q_r$

La démarche permettant de calculer la température d'équilibre, s'obtient en substituant ces correspondances dans les étapes a), b) et c) ci-dessus.

Domaine de validité du modèle théorique

Rappelons que dans les relations calorimétriques données plus haut ($Q = cm(T - T_0)$ et $Q = Lm$), la capacité calorifique massique peut être considérée comme constante pour un matériau donné, pour autant que l'intervalle de température $T - T_0$ ne soit pas trop grand. Rigoureusement, la capacité calorifique massique n'est pas une constante ; elle dépend de la température et de la pression. On distingue d'ailleurs la capacité calorifique massique à volume constant (notée c_v), de celle à pression constante (notée c_p). La chaleur latente dépend elle aussi de la pression.

Conclusion

La réponse à la question initiale que nous nous sommes posée (*Est-il possible de calculer la température d'équilibre d'un nombre arbitraire de corps en contact ?*) n'est pas évidente. Cette question, de nature théorique, peut faire naître l'appréhension d'une approche techniquement compliquée si l'on souhaite trouver les équations qui permettent de calculer cette température d'équilibre, dans le cadre théorique de la thermostatique.

L'analogie hydrostatique utilisée dans ce travail est remarquable à deux titres ; elle permet d'une part de répondre à la question initiale sans aucun calcul. En effet, une fois trouvée la forme particulière des récipients à utiliser dans l'analogie hydrostatique (c.f. fig.1), le problème se ramène à une situation de vases communicants, dans laquelle on comprend immédiatement qu'il est possible d'en trouver le niveau d'équilibre.

D'autre part, le calcul de ce niveau d'équilibre est simple, conceptuellement et techniquement. Il consiste à répartir une certaine quantité de liquide dans des récipients de manière à ce que les niveaux dans ceux-ci soient les mêmes.

Ce travail exemplifie le fait que pour le physicien, la fonction principale d'une analogie est de l'aider dans sa démarche de conceptualisation d'un nouveau phénomène, en faisant le rapprochement avec un domaine déjà connu et conceptualisé.

James Clerk Maxwell (1831-1879) était un physicien et mathématicien écossais. Il élaborà à l'époque le modèle le plus unifié de l'électromagnétisme, synthétisé par un ensemble de quatre équations, appelées équations de Maxwell.

À propos des analogies, Maxwell a écrit : *"Par analogie physique, j'entends cette ressemblance partielle entre les lois d'une science et les lois d'une autre, qui fait que l'une des deux peut servir à illustrer l'autre."*