

ANGLE DE DÉFLEXION D'UN RAYON LUMINEUX PAR UNE MASSE

PARTIE II

APPROCHE RELATIVISTE

P. Rebetez
Mai 2021

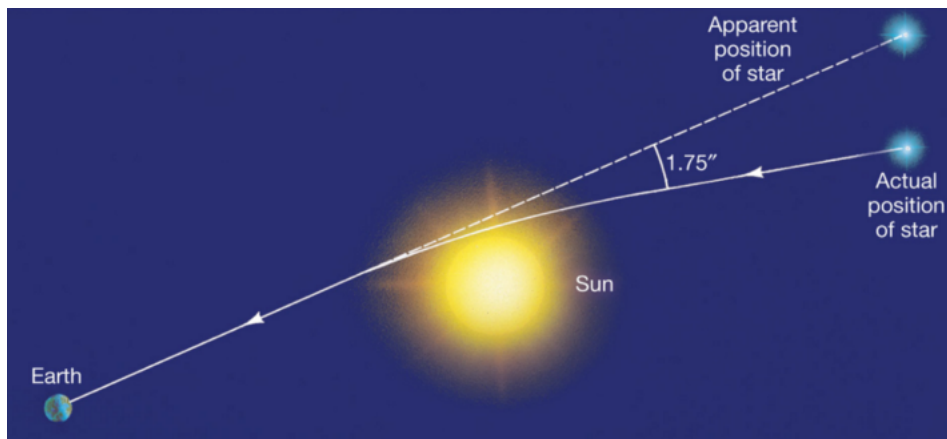


Fig. Déviation d'un rayon lumineux issu d'une étoile lointaine et passant à proximité du Soleil. Observée depuis la Terre, la position apparente de l'étoile diffère de sa position réelle.

Source : <https://ichi.pro/fr/la-theorie-de-la-gravite-d-einstein-et-la-flexion-de-la-lumiere-par-le-soleil-33506753698841>

CONTENU

1.	INTRODUCTION	3
2.	QUANTITÉ DE MOUVEMENT, ÉNERGIE ET MOMENT CINÉTIQUE EN MÉCANIQUE RELATIVISTE	5
3.	FORCE CONSERVATIVE, ÉNERGIE POTENTIELLE ET PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA DYNAMIQUE EN MÉCANIQUE RELATIVISTE.....	7
4.	CONSTANTES DU MOUVEMENT POUR UN MOUVEMENT KÉPLÉRIEN	11
5.	ÉQUATION DU MOUVEMENT DE KEPLER.....	16
6.	SOLUTION DE L'ÉQUATION DU MOUVEMENT DE KEPLER.....	20
7.	INTERMÈDE SUR LES CONIQUES	25
8.	CONDITIONS AUX LIMITES.....	27
9.	CALCUL DE L'ANGLE DE DÉFLEXION	31
10.	ANGLE DE DÉFLEXION POUR UN PHOTON	34
11.	DISCUSSION DE LA SOLUTION.....	35
12.	APPLICATION NUMÉRIQUE.....	36
13.	NOTE HISTORIQUE.....	37
14.	CONCLUSION	43
15.	REMERCIEMENTS.....	43
16.	ANNEXES	44
	A. Démonstration de l'équation (17).....	44
	B. Démonstration de l'équation (39).....	45
	C. Démonstration de l'équation (43).....	47
	D. Démonstration : quand la vitesse de la particule tend vers celle de la lumière, la distance de moindre approche tend vers le paramètre d'impact	48
	E. Dédution de l'angle de déflexion à partir des plaques photographiques	53
17.	RÉFÉRENCES	62

1. Introduction

L'une des conséquences remarquables de la théorie de la relativité générale est la déviation de rayons lumineux passant à proximité d'une distribution de masse-énergie. Cette déviation s'explique, dans le cadre de cette théorie, par le fait que toute distribution de masse-énergie déforme l'espace-temps dans son voisinage d'une part, et que la ligne d'univers de toute particule est une géodésique¹ de l'espace-temps d'autre part.

Considérons une masse M sphérique et un rayon lumineux s'en approchant, dont la trajectoire rectiligne initiale (très loin de la masse M) est située à une distance d du centre de la masse M , d étant appelé le **paramètre d'impact**.

La théorie de la relativité générale prédit *une déviation du rayon lumineux* par la masse M . On caractérise cette déviation par un angle, appelé **angle de déflexion** et noté α , lequel est défini par l'angle que forment les trajectoires rectilignes initiale et finale (très loin de la masse M , avant et après déviation du rayon lumineux) du rayon lumineux, comme indiqué sur la figure 1 :

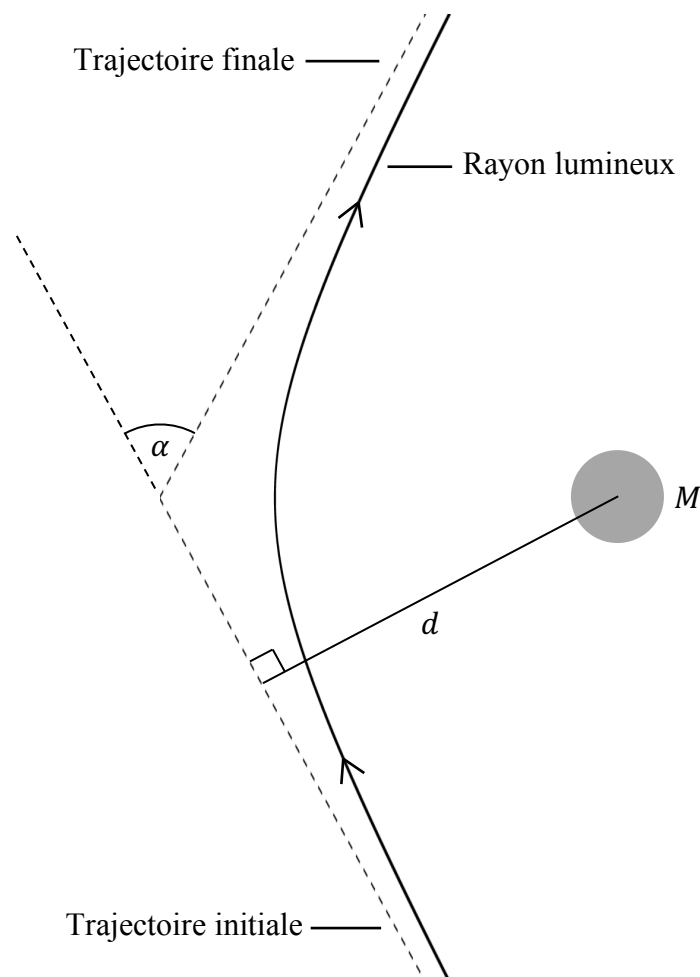


Fig. 1 Déviation d'un rayon lumineux par une masse sphérique.

¹ Une **géodésique** est une courbe de plus courte distance entre deux points sur une surface quelconque. Par exemple, les géodésiques du plan euclidien sont les droites ; celles d'une surface sphérique sont les grands cercles obtenus en la sectionnant par un plan passant par son centre.

La théorie de la relativité générale prédit un angle de déflexion égal à :

$$\alpha = \frac{4G M}{c^2 d} \quad (1)$$

où G est la constante de gravitation universelle et c la vitesse de la lumière (des ondes électromagnétiques) dans le vide.

Les calculs qui permettent d'obtenir ce résultat (1) sont d'un niveau mathématique qui dépasse celui d'un-e gymnasien-ne. Nous pouvons cependant calculer cet angle de déflexion dans le cadre théorique de la mécanique newtonienne d'une part, ce qui, en principe est faux, mais le résultat obtenu de cette manière est égal, à un facteur 2 près, à celui indiqué ci-dessus. Ceci est fort surprenant compte tenu de la différence profonde entre l'interprétation newtonienne de la gravitation et son interprétation einsteinienne.

Nous traitons ici ce problème dans le cadre théorique de la mécanique relativiste (théorie de la relativité restreinte). Ces deux approches – newtonienne et relativiste – sont intéressantes dans le sens où la loi de la gravitation universelle de la mécanique newtonienne est la limite de la théorie de la relativité générale pour des champs gravitationnels faibles. D'autre part, la théorie de la relativité générale se réduit à la théorie de la relativité restreinte et à sa mécanique relativiste, en l'absence de champ gravitationnel. Ainsi, mécanique newtonienne et relativiste sont englobées dans la théorie de la relativité générale et en sont deux cas limites différents.

2. Quantité de mouvement, énergie et moment cinétique en mécanique relativiste

La démarche suivie pour obtenir l'angle de déflexion d'un rayon lumineux par une masse dans le cadre théorique de la mécanique relativiste (théorie de la relativité restreinte) est essentiellement la même que celle employée dans l'approche newtonienne, à savoir l'application des lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique. Cependant, la quantité de mouvement, l'énergie et le moment cinétique diffèrent, par leur expression, en mécanique relativiste et en mécanique newtonienne. Nous commençons donc par donner les expressions relativistes de ces trois grandeurs.

La quantité de mouvement (ou impulsion) relativiste \vec{p} d'une particule de masse m et de vitesse \vec{v} est donnée par :

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (\|\vec{v}\|/c)^2}} \equiv \gamma m\vec{v} \quad (2)$$

Où $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - (\|\vec{v}\|/c)^2}$

L'énergie E d'une particule libre est donnée par :

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\|\vec{v}\|/c)^2}} \equiv \gamma mc^2 \quad (3)$$

Que l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} E &= mc^2 + (\gamma - 1)mc^2 \\ &= mc^2 + E_{cin} \end{aligned}$$

Où mc^2 est l'énergie au repos de la particule, c'est-à-dire son *énergie de masse* et $E_{cin} = (\gamma - 1)mc^2$ est son *énergie cinétique*.

En mécanique relativiste comme en mécanique newtonienne, l'impulsion \vec{P} et l'énergie E d'un système fermé² sont conservées, ces deux lois de conservation découlant respectivement des postulats d'homogénéité de l'espace (à 3 dimensions) et d'homogénéité du temps. Le moment cinétique \vec{L} d'un système fermé est lui aussi conservé, cette conservation découlant, en mécanique newtonienne, du postulat d'isotropie de l'espace (à 3 dimensions). En mécanique relativiste, la conservation du moment cinétique est une conséquence du postulat d'isotropie *de l'espace-temps à 4 dimensions*. Pour cette raison, le moment cinétique relativiste, en tant que grandeur conservée associée à une propriété de symétrie de l'espace-temps, est de nature mathématiquement différente de celle du moment cinétique newtonien $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$, ce dernier étant un vecteur à 3 dimensions, avec \vec{r} le vecteur position de la particule et $\vec{p} = m\vec{v}$, sa quantité

² Par système **fermé** on entend un système de particules n'interagissant qu'entre elles et ne subissant aucune force de la part de l'extérieur à ce système. On dit aussi d'un tel système qu'il est **isolé** (de toute influence extérieure).

de mouvement newtonienne, où m désigne sa masse et \vec{v} son vecteur position³. En effet, en mécanique relativiste le moment cinétique est un quadri-tenseur (antisymétrique), c'est-à-dire une quantité $l_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) à 16 composantes dont chacune est conservée⁴. Cependant, 3 des 16 composantes de ce tenseur sont les composantes du vecteur tridimensionnel suivant :

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (4)$$

où $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ est la quantité de mouvement relativiste. Ce vecteur tridimensionnel est appelé *vecteur* moment cinétique relativiste. On voit que son expression ne diffère de celle de la mécanique newtonienne que par la définition de la quantité de mouvement y apparaissant.

L'expression des trois grandeurs mécaniques en mécanique relativiste sont rappelées dans le tableau ci-dessous, pour une particule libre.

Grandeur	Expression
Quantité de mouvement (impulsion)	$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - (\ \vec{v}\ /c)^2}} \equiv \gamma m \vec{v}$
Énergie	$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (\ \vec{v}\ /c)^2}} \equiv \gamma mc^2$
Moment cinétique	$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$

³ Les lettres majuscules \vec{P} et \vec{L} désignent respectivement la somme des quantités de mouvement \vec{p} et des moments cinétiques \vec{l} individuels des particules constituant le système. Autrement dit, \vec{P} et \vec{L} désignent respectivement l'impulsion *totale* et le moment cinétique *total* du système de particules.

⁴ Pour une discussion détaillée au sujet du moment cinétique en relativité restreinte et des calculs permettant d'obtenir son expression, voir par exemple *Physique théorique, tome II – Théorie du champ* par L. Landau et E. Lifchitz.

3. Force conservative, énergie potentielle et principe fondamental de la dynamique en mécanique relativiste

Pour étendre à la mécanique relativiste les notions de force conservative, d'énergie potentielle et de principe fondamental de la dynamique (deuxième loi de Newton) utilisées en mécanique newtonienne, il faut que l'expression :

$$E_{tot} = E + U(\vec{r}) \quad (5)$$

reste valable en théorie de la relativité restreinte, où E_{tot} est l'énergie totale d'une particule, E son énergie (relativiste) lorsqu'elle est libre et $U(\vec{r})$, appelée énergie potentielle, est une fonction scalaire décrivant l'énergie associée à l'interaction de la particule avec le champ de force dans lequel elle est située. $U(\vec{r})$ est supposée ne dépendre *que* de la position \vec{r} de la particule dans le champ de force. Il est important de préciser que cette fonction ne doit pas dépendre *explicitement* du temps, ni de la vitesse \vec{v} de la particule.

En mécanique newtonienne, *on définit l'énergie potentielle $U(\vec{r})$ à partir de la force $\vec{F}(\vec{r})$* , cette dernière intervenant dans la formulation même des lois du mouvement (les lois de Newton). Cette définition est la suivante :

$$U(\vec{r}) = - \int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (6)$$

ce qui implique :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) \quad (7)$$

où $\vec{\nabla}U(\vec{r})$ est un *vecteur* appelé **gradient** de la fonction $U(\vec{r})$ et est donné par :

$$\vec{\nabla}U(\vec{r}) = \left(\frac{\partial U(x; y; z)}{\partial x}; \frac{\partial U(x; y; z)}{\partial y}; \frac{\partial U(x; y; z)}{\partial z} \right) \quad (8)$$

avec $(x; y; z)$ les coordonnées (cartésiennes) du vecteur position \vec{r} de la particule. On note souvent (8) de manière plus compacte :

$$\vec{\nabla}U(\vec{r}) \equiv \frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}} = \left(\frac{\partial U}{\partial x}; \frac{\partial U}{\partial y}; \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (9)$$

où la deuxième égalité ci-dessus est une autre notation pour $\vec{\nabla}U(\vec{r})$.

Si, pour une force $\vec{F}(\vec{r})$ donnée, il existe une fonction $\vec{\nabla}U(\vec{r})$ satisfaisant la condition (7), alors $\vec{F}(\vec{r})$ est appelée **force conservative**.

Avec la définition (7) et l'expression (9), on peut exprimer les composantes de la force \vec{F} à partir de l'énergie potentielle $U(\vec{r}) = U(x; y; z)$:

$$\begin{aligned}
F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\
F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} \\
F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{10}$$

ou encore :

$$(F_x; F_y; F_z) = \left(-\frac{\partial U}{\partial x}; -\frac{\partial U}{\partial y}; -\frac{\partial U}{\partial z} \right)
\tag{11}$$

Inversement à la mécanique newtonienne, en mécanique relativiste *on définit la force* $\vec{F}(\vec{r})$ *subie par une particule de la part du champ dans lequel elle est située, à partir de l'énergie potentielle* $U(\vec{r})$ *selon la relation (7).*

Pour obtenir le principe fondamental de la dynamique en relativité restreinte, nous suivrons la démarche suivante : nous *admettons* que la relation $E_{tot} = E + U(\vec{r})$ reste valable en mécanique relativiste et appliquons la loi de conservation de l'énergie, à l'énergie totale E_{tot} d'une particule⁵.

La conservation de l'énergie totale d'une particule signifie que cette grandeur ne varie pas au cours du temps. Mathématiquement, cela s'exprime par :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 0
\tag{12}$$

ce qui donne, d'après l'équation (5) :

$$\frac{dE}{dt} + \frac{dU(\vec{r})}{dt} = 0
\tag{13}$$

Inspirons-nous de la mécanique newtonienne et de son principe fondamental de la dynamique, lequel définit la force en termes de quantité de mouvement. Pour faire apparaître cette dernière dans l'équation (13), utilisons l'expression de l'énergie (relativiste) en fonction de la quantité de mouvement (relativiste). Cette expression est donnée par :

$$E^2 = \|\vec{p}\|^2 c^2 + m^2 c^4
\tag{14}$$

Cette dernière équation s'obtient en combinant les expressions (2) et (3) de la quantité de mouvement et de l'énergie, respectivement.

Occupons-nous du premier terme du membre de gauche de l'équation (13) en dérivant l'équation (14) par rapport au temps. On a :

⁵ Nous démontrons plus loin la conservation de l'énergie totale *d'une particule* dans le cas du mouvement képlérien.

$$2E \frac{dE}{dt} = 2c^2 \|\vec{p}\| \frac{d\|\vec{p}\|}{dt} \quad (15)$$

d'où :

$$E \frac{dE}{dt} = c^2 \vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (16)$$

où, pour passer de l'équation (15) à l'équation (16), nous avons utilisé le résultat :

$$\|\vec{p}\| \frac{d\|\vec{p}\|}{dt} = \vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (17)$$

Le résultat (17) ne coulant pas de source, nous le démontrons dans l'annexe A.

Passons maintenant au deuxième terme du membre de gauche de l'équation (13). Comme, par hypothèse, la fonction $U(\vec{r})$ ne dépend pas *explicitement* du temps, elle n'en dépend qu'*implicitement*, par l'intermédiaire de la variable \vec{r} . En effet, la position \vec{r} d'une particule en mouvement varie au cours du temps. On a donc :

$$\frac{dU(\vec{r})}{dt} = \frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (18)$$

Avec la notation (9), (18) s'écrit :

$$\frac{dU(\vec{r})}{dt} = \vec{\nabla}U(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (19)$$

En substituant les expressions (16) et (19) dans l'équation (13), on a :

$$\frac{c^2}{E} \vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{\nabla}U(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{dt} = 0 \quad (20)$$

En substituant dans (20) les expressions (2) et (3) de l'impulsion, respectivement de l'énergie et en remarquant que $d\vec{r}/dt$ n'est autre que la définition de la vitesse \vec{v} , on a :

$$\frac{c^2}{\gamma mc^2} \gamma m \vec{v} \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{\nabla}U(\vec{r}) \vec{v} = 0 \quad (21)$$

Après simplification et mise en évidence de \vec{v} , on obtient :

$$\vec{v} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{\nabla}U(\vec{r}) \right) = 0 \quad (22)$$

En insérant dans (22) la définition (7) de la force, on obtient finalement :

$$\vec{v} \left(\frac{d\vec{p}}{dt} - \vec{F}(\vec{r}) \right) = 0 \quad (23)$$

Pour que cette dernière équation soit valable pour toute valeur de \vec{v} , il faut que :

$$\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}}{dt}} \quad (24)$$

Nous obtenons en (24) le principe fondamental de la dynamique valable en mécanique relativiste. Nous constatons qu'il a la même forme qu'en mécanique newtonienne et n'en diffère que par l'expression de la quantité de mouvement en termes de laquelle il s'exprime, à savoir que dans (24), \vec{p} est l'impulsion *relativiste* donnée en (2). Insistons sur le fait que le principe fondamental (24) est une *conséquence de la loi de conservation de l'énergie*.

4. Constantes du mouvement pour un mouvement képlérien

La démarche suivie par la suite pour calculer la déflexion d'un rayon lumineux par un corps massif est de considérer dans un premier temps la déflexion d'une particule massive par un corps beaucoup plus massif que celle-ci, tous deux interagissant gravitationnellement.

On peut ainsi considérer la particule comme étant soumise à une force centrale, et il s'agit de chercher sa trajectoire puis d'en déduire son angle de déflexion.

Comme annoncé plus haut, le calcul de la trajectoire se fait essentiellement comme en mécanique newtonienne, c'est-à-dire en appliquant les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique.

Une fois obtenu l'angle de déflexion de la particule en fonction de la vitesse initiale de cette dernière, on étudie la limite de cet angle lorsque cette vitesse tend vers c , la vitesse de la lumière (dans le vide). Cela signifie que l'on cherche ainsi l'angle de déflexion pour un photon, autrement dit, un rayon lumineux.

Cependant, les lois de conservation de l'impulsion (\vec{P}), de l'énergie (E) et du moment cinétique (\vec{L}) dont on a parlé précédemment concernent un système *isolé*. Or, dans notre situation, la particule étudiée, considérée individuellement, ne constitue pas un système isolé puisqu'elle est soumise, en tout point de sa trajectoire, à une force (la force gravitationnelle). Toutefois, nous montrons que si cette force est *centrale*, ce qui est le cas de la force gravitationnelle, alors le moment cinétique de la particule est conservé. D'autre part, nous chercherons l'expression de l'énergie conservée du système particule-corps massif.

- Conservation du moment cinétique d'une particule en mouvement dans un champ de force centrale et trajectoire plane

On dit d'une force $\vec{F}(\vec{r})$ qu'elle est **centrale** de centre O , où O est un point fixe de l'espace si, quelle que soit la position \vec{r} d'une particule subissant cette force :

- la droite d'action de cette force passe par O
 - la norme $\|\vec{F}(\vec{r})\|$ de cette force ne dépend que de la distance au centre O
- O est appelé **centre de force** (cf. fig. 2 ci-dessous).

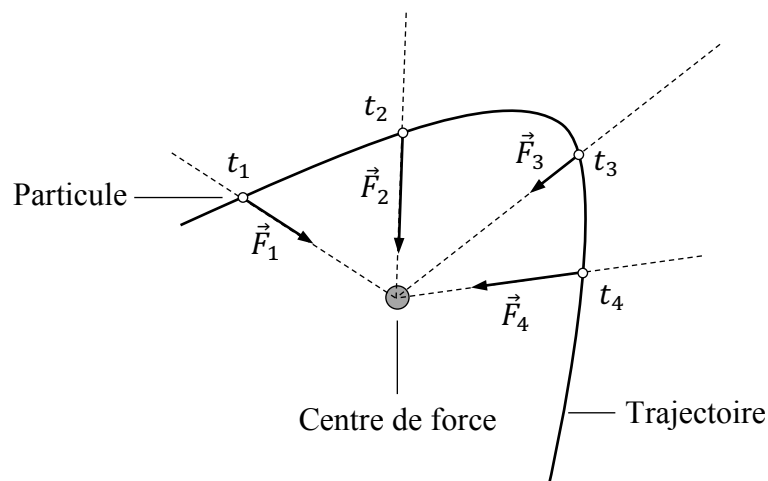


Fig. 2 Force centrale et centre de force.

En choisissant pour origine du repère le centre de force, une force centrale a donc la forme :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \pm \|\vec{F}(\|\vec{r}\|)\| \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$$

ou, en notation allégée :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \pm F(r) \frac{\vec{r}}{r} \quad (25)$$

Dans cette expression, on prend le signe positif si la force est répulsive et le signe négatif si elle est attractive. \vec{r}/r est un vecteur de norme 1 et de même orientation que le vecteur \vec{r} ; on dit que c'est un vecteur **unitaire**.

Ainsi, si la force est centrale, alors elle s'écrit $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r)$ et, d'après la relation (7) entre force et énergie potentielle, cette dernière s'écrit $U(\vec{r}) = U(r)$ ⁶ de sorte que $\vec{F}(r) = -\vec{\nabla}U(r)$.

Montrons que le moment cinétique d'une particule soumise à une force centrale est conservé, c'est à dire qu'il demeure constant au cours du temps. Pour ce faire, calculons la dérivée par rapport au temps du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (26)$$

Comme $d\vec{r}/dt = \vec{v}$ et $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ (cf. (24)), on a :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \quad (27)$$

En exprimant l'impulsion $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et le fait que la force est centrale (équation (25)), cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{l}}{dt} &= \vec{v} \times (\gamma m \vec{v}) + \vec{r} \times \left(\pm F(r) \frac{\vec{r}}{r} \right) \\ &= \gamma m \underbrace{(\vec{v} \times \vec{v})}_{\vec{0}} \pm \frac{F(r)}{r} \underbrace{(\vec{r} \times \vec{r})}_{\vec{0}} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

La dernière égalité ci-dessus est due au fait que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}, \forall \vec{u}$. Ainsi :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{0} \quad (28)$$

Par conséquent, *le moment cinétique d'une particule soumise à une force centrale est constant*, raison pour laquelle nous le notons \vec{l}_0 :

⁶ Ce qui signifie que l'énergie potentielle de la particule ne dépend que de la distance r de cette dernière au centre de force.

$$\boxed{\vec{l} = \overrightarrow{cte} \equiv \vec{l}_0}$$

La constance du moment cinétique d'une particule implique que *sa trajectoire est plane*. Pour le montrer, développons l'expression du moment cinétique d'une particule :

$$\begin{aligned} \vec{l} &= \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\gamma m \vec{v}) \\ &= \gamma m (\vec{r} \times \vec{v}) = \gamma m \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Comme $d\vec{r}/dt$ est un vecteur de même orientation que celle du vecteur $d\vec{r}$, il découle de l'équation ci-dessus que le vecteur \vec{l} a la même orientation que celle du vecteur $\vec{r} \times d\vec{r}$. En effet, multiplier un vecteur par un scalaire positif (en l'occurrence γm) ne modifie pas l'orientation (direction et sens) du vecteur (en l'occurrence $\vec{r} \times d\vec{r}$). Par conséquent, \vec{l} est perpendiculaire au vecteur \vec{r} et ce, en tout point de la trajectoire de la particule⁷. Cela signifie que le vecteur position \vec{r} de la particule balaie au cours du temps une surface plane. La trajectoire de la particule est donc contenue dans un plan perpendiculaire au vecteur moment cinétique \vec{l} et est, par conséquent, d'orientation constante dans l'espace (cf. fig. 3 ci-dessous).

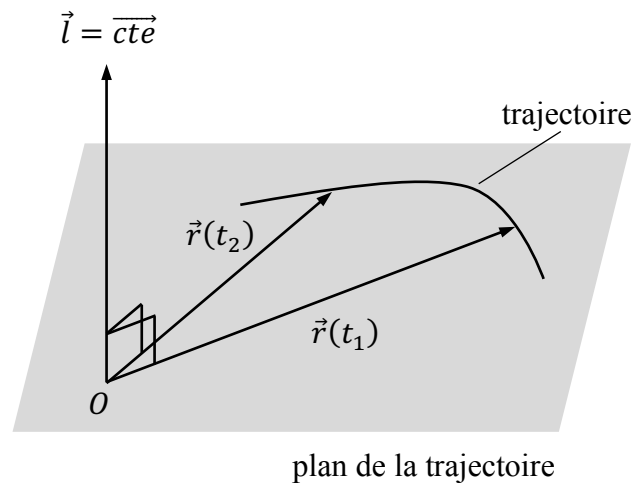


Fig. 3 Force centrale, moment cinétique constant et trajectoire plane.

- Conservation de l'énergie d'une particule en mouvement dans un champ de force centrale

Pour étudier l'énergie de la particule, nous allons cette fois considérer le système que constitue la particule *et* le corps massif avec lequel elle interagit. Nous supposons que ce système est isolé. Or, nous avons vu plus haut que l'énergie d'un tel système est conservée. Cette énergie conservée est l'énergie *totale* du système, qui englobe, dans le cas général, les énergies de masse et les énergies cinétiques respectives des constituants du système, ainsi que leurs énergies d'interaction.

⁷ En vertu du fait que le vecteur $\vec{u} \times \vec{v}$ est perpendiculaire au vecteur \vec{u} ainsi qu'au vecteur \vec{v} , $\forall \vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$.

C'est dans le référentiel du corps massif interagissant gravitationnellement avec la particule que nous nous sommes placés pour exprimer le moment cinétique de cette dernière (en prenant pour origine du repère spatial le centre de masse du corps massif, c'est à dire le centre de force) et c'est dans ce même référentiel que nous devons exprimer la conservation de l'énergie totale du système particule-corps massif. Pour ce faire, nous employons les notations suivantes :

- M et m les masses respectives du corps massif et de la particule
- à un instant t_1 : $E_{1\text{corps}}$ et E_1 les énergies respectives du corps massif et de la particule lorsqu'ils sont libres
 $U(r_1)$ leur énergie potentielle d'interaction
 E_{tot_1} l'énergie totale du système particule-corps massif
- à un instant t_2 : $E_{2\text{corps}}$ et E_2 les énergies respectives du corps massif et de la particule lorsqu'ils sont libres
 $U(r_2)$ leur énergie potentielle d'interaction⁸
 E_{tot_2} l'énergie totale du système particule-corps massif

La conservation de l'énergie totale *du système* particule-corps massif signifie que celle-ci est la même à tout instant, c'est-à-dire que sa valeur à un instant t_1 quelconque est la même qu'à un autre instant t_2 quelconque :

$$E_{tot_1} = E_{tot_2} \quad (30)$$

$$E_{1\text{corps}} + E_1 + U(r_1) = E_{2\text{corps}} + E_2 + U(r_2) \quad (31)$$

Dans le référentiel du corps massif, ce dernier est évidemment au repos. Son énergie cinétique est donc nulle et son énergie se restreint à son énergie de masse Mc^2 . Développons l'équation ci-dessus à l'aune de ce fait :

$$Mc^2 + \gamma_1 mc^2 + U(r_1) = Mc^2 + \gamma_2 mc^2 + U(r_2) \quad (32)$$

$$Mc^2 + mc^2 + (\gamma_1 - 1)mc^2 + U(r_1) = Mc^2 + mc^2 + (\gamma_2 - 1)mc^2 + U(r_2) \quad (33)$$

où $\gamma_{1,2} \equiv 1/\sqrt{1 - (v_{1,2}/c)^2} \equiv 1/\sqrt{1 - (v(t_{1,2})/c)^2}$

Les énergies de masse se simplifient dans l'équation (33), ce qui donne :

$$(\gamma_1 - 1)mc^2 + U(r_1) = (\gamma_2 - 1)mc^2 + U(r_2) \quad (34)$$

Que l'on peut écrire :

$$E_{cin_1} + U(r_1) = E_{cin_2} + U(r_2) \quad (35)$$

⁸ $r_1 \equiv r(t_1)$ et $r_2 \equiv r(t_2)$

où $E_{cin1,2}$ sont les énergies cinétiques de la particule aux instants t_1 respectivement t_2 . Nous voyons dans l'équation (35) que, de la conservation de l'énergie totale du système particule-corps massif, découle la conservation de la somme de l'énergie cinétique de la particule et de l'énergie potentielle d'interaction entre cette dernière et le corps massif. On note E_0 cette somme constante⁹ :

$$\boxed{E_0 = (\gamma - 1)mc^2 + U(r)} \quad (36)$$

Ainsi, pour un mouvement képlérien, il y a deux constantes du mouvement : le moment cinétique \vec{l}_0 de la particule et l'énergie E_0 du système particule-corps massif, dont l'expression est donnée en (36). De plus, la conservation du moment cinétique de la particule impose à celle-ci un mouvement plan, comme nous l'avons montré plus haut.

⁹ E_0 reste constante en lui ajoutant l'énergie de masse mc^2 constante (et invariante) de la particule, ce qui permet aussi de dire que l'énergie totale *de la particule* est conservée.

5. Équation du mouvement de Kepler

Nous cherchons ici à obtenir l'équation du mouvement de Kepler, dont la solution donnera l'équation de la trajectoire de la particule en mouvement dans le champ de force centrale (le champ gravitationnel) produit par le corps massif.

La trajectoire de la particule étant plane, deux coordonnées suffisent pour déterminer la position de cette dernière dans le plan de sa trajectoire. Nous choisissons un système de coordonnées polaires $(r; \theta)$ dont l'origine O du repère est située au centre de force, c'est-à-dire au centre de masse du corps massif (cf. fig. 4 ci-dessous).

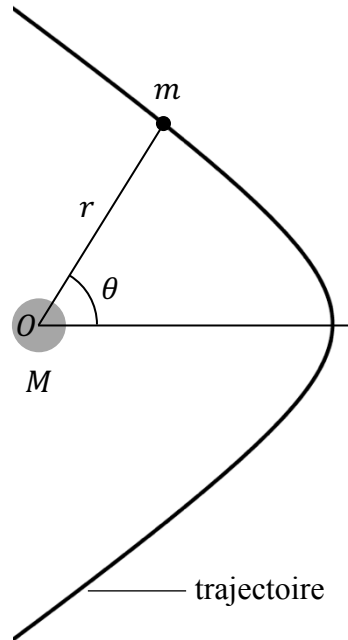


Fig. 4 Système de coordonnées polaires dans le plan de la trajectoire de la particule.

Il s'agit maintenant de trouver l'équation exprimant la relation entre les coordonnées r et θ de la particule en tout point de sa trajectoire. Pour ce faire, nous utilisons les deux constantes du mouvement képlérien que sont le moment cinétique \vec{l}_0 de la particule et l'énergie E_0 du système particule-corps massif.

De l'expression (36) de l'énergie conservée E_0 , on en déduit :

$$\gamma^2 = \left(1 + \frac{E_0 - U(r)}{mc^2} \right)^2 \quad (37)$$

De la définition du facteur γ , on a :

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{c^2} \|\vec{v}\|^2} = \left(1 - \frac{1}{c^2} \|\vec{v}\|^2 \right)^{-1} \quad (38)$$

Dans (38) apparaît $\|\vec{v}\|^2$ que l'on doit exprimer en coordonnées polaires, ce qui donne :

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (39)$$

Nous démontrons le résultat (39) dans l'annexe B. En substituant (39) dans (38), on obtient :

$$\gamma^2 = \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)^{-1} \quad (40)$$

Comme $r = r(\theta)$, on a :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (41)$$

En substituant (41) dans (40), on a :

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)^{-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\right)^{-1} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \gamma^2 \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right)\right) &= 1 \\ \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \left(\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right) &= 1 \end{aligned} \quad (42)$$

Dans (42) apparaît la vitesse angulaire $d\theta/dt$, que l'on peut exprimer en fonction du moment cinétique constant \vec{l}_0 . En effet, en coordonnées polaires, la norme du vecteur moment cinétique est donnée par :

$$l_0 \equiv \|\vec{l}_0\| = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (43)$$

Ce résultat (43) est démontré dans l'annexe C. D'où :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{l_0}{\gamma m r^2} \quad (44)$$

En substituant (44) dans (42), on obtient :

$$\gamma^2 - \frac{l_0^2}{c^2 m^2 r^4} \left(\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right) = 1$$

Et finalement :

$$\gamma^2 = 1 + \frac{l_0^2}{c^2 m^2 r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{l_0^2}{c^2 m^2 r^2} \quad (45)$$

Nous pouvons maintenant éгалer les expressions (45) et (37) :

$$1 + \frac{l_0^2}{c^2 m^2 r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + \frac{l_0^2}{c^2 m^2 r^2} = \left(1 + \frac{E_0 - U(r)}{mc^2} \right)^2 \quad (46)$$

La résolution de cette équation sera plus aisée en effectuant le changement de variable $u = 1/r$. Par ce dernier, on a :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} \quad (47)$$

En substituant (47) dans (46), on obtient après quelques calculs :

$$1 + \frac{l_0^2}{m^2 c^2} \left(\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right) = \left(1 + \frac{E_0 - U(u)}{mc^2} \right)^2 \quad (48)$$

(48) est une équation différentielle non-linéaire et ce type d'équation est difficile à résoudre du fait de sa non linéarité. Pour ramener (48) à une équation différentielle linéaire, on la dérive par rapport à la variable θ . Après quelques calculs, on obtient :

$$\frac{l_0^2}{m^2 c^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -\frac{1}{mc^2} \left(1 + \frac{E_0 - U(u)}{mc^2} \right) \frac{dU}{du} \quad (49)$$

Il s'agit maintenant d'expliciter l'énergie potentielle gravitationnelle $U(u)$ dans l'équation ci-dessus. En fonction de la variable r , celle-ci est donnée par¹⁰ :

$$U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (50)$$

Une remarque importante s'impose ici : l'expression (50) implique une interaction à distance *instantannée* entre le corps massif et la particule. En effet, une modification de la distance r entre la particule et le corps massif se répercute instantanément sur l'énergie potentielle $U(r)$ décrivant l'interaction (gravitationnelle) à distance entre celles-ci. Cela signifie une

¹⁰ Cette expression s'obtient grâce à la loi de la gravitation universelle donnant l'expression de la force gravitationnelle s'exerçant entre deux masses M et m : $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$, où \vec{r} est la position (du centre de masse) de la masse m relativement au centre (de masse) de la masse M , et \vec{r}/r est un vecteur unitaire. L'expression (50) de $U(r)$ s'obtient alors à l'aide de la relation générale (6) : $U(\vec{r}) = -\int \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ qui, dans le cas d'une force centrale qu'est la force gravitationnelle, donne : $U(r) = -\int \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$.

propagation de l'interaction à *vitesse infinie*. Or, la théorie de la relativité restreinte interdit à toute vitesse d'être infinie et prédit, au contraire, l'existence d'une vitesse maximale, finie et invariante, la vitesse des ondes électromagnétiques dans le vide. Ainsi, notre approche du problème de Kepler dans le cadre de la mécanique relativiste est, en toute rigueur, inexacte.

En fonction de la variable u , on a $U(u) = -GMmu$ et par conséquent, $dU/du = -GMm$. La substitution de ces deux expressions dans (49) donne finalement, après quelques calculs :

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{G^2 M^2 m^2}{l_0^2 c^2}\right) u = \frac{GMm^2}{l_0^2} \left(1 + \frac{E_0}{mc^2}\right)} \quad (51)$$

Cette équation (51) est *l'équation du mouvement du problème de Kepler en mécanique relativiste*.

6. Solution de l'équation du mouvement de Kepler

Attelons-nous maintenant à la résolution de l'équation (51), qui est de la forme :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + Au = B \quad (52)$$

Où :

$$\begin{aligned} A &= 1 - \frac{G^2 M^2 m^2}{l_0^2 c^2} \\ B &= \frac{GMm^2}{l_0^2} \left(1 + \frac{E_0}{mc^2} \right) \end{aligned} \quad (53)$$

(52) est une équation différentielle linéaire inhomogène (avec second membre) du second ordre à coefficients constants. La solution générale $u(\theta)$ d'une telle équation est donnée par la somme de deux termes :

$$u(\theta) = u_0(\theta) + u_1(\theta) \quad (54)$$

où $u_0(\theta)$ est une solution *particulière* de l'équation complète (52) et $u_1(\theta)$ est la solution *générale* de l'équation (52) *sans second membre* (l'équation homogène), c'est-à-dire de l'équation (52) où $B = 0$.

Une solution particulière de (52) est :

$$u_0 = \frac{B}{A} \quad (55)$$

où A et B sont donnés en (53). L'équation (52) sans second membre est :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + Au = 0 \quad (56)$$

C'est une équation différentielle de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (57)$$

L'équation caractéristique¹¹ associée à cette équation différentielle (57) est :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (58)$$

La solution générale de l'équation différentielle (57) est déterminée par les solutions de son équation caractéristique (58). Pour (56), $a = 1$, $b = 0$, $c = A$ et l'équation caractéristique associée est dans ce cas :

$$\lambda^2 + A = 0 \quad (59)$$

¹¹ Se référer à la théorie mathématique sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants.

dont les deux solutions sont :

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-A} \quad (60)$$

où, selon (53), nous avons :

$$A = 1 - \frac{G^2 M^2 m^2}{l_0^2 c^2}$$

avec, comme nous le verrons plus loin à l'équation (85), $l_0 = l_1 = \gamma_1 m v_1 r_1$ avec v_1 la vitesse de la particule en \vec{r}_1 , où r_1 est la distance de moindre approche (cf. section 8) et $\gamma_1 = \sqrt{1/(1 - (v_1/c)^2)}$, avec $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}(\vec{r}_1)$. Nous obtenons donc, après quelques calculs :

$$A = 1 - \frac{G^2 M^2 \left(\frac{c^2}{v_1^2} - 1 \right)}{c^4 r_1^2} \quad (61)$$

Il faut étudier le signe de A car la solution de l'équation différentielle (56) en dépend. Étant donné (60), il faut distinguer trois cas : $A = 0$, $A < 0$, $A > 0$.

$A = 0$

Cette condition implique que :

$$\frac{M}{r_1} = \frac{c^2}{\sqrt{\underbrace{G \left(\frac{c^2}{v_1^2} - 1 \right)}_{>0}}} \stackrel{v_1 \rightarrow c}{\Rightarrow} \frac{M}{d} \rightarrow \infty$$

Comme nous nous intéressons à la déflexion d'une particule dont la vitesse tend vers c (un photon), nous voyons que dans ce cas, le rapport M/d tend vers l'infini¹². Ceci n'est physiquement pas admissible puisque nous considérons des situations où le rapport M/d doit être quelconque, donc fini.

$A < 0$

Cette condition implique que :

$$\frac{M}{r_1} > \frac{c^2}{\sqrt{\underbrace{G \left(\frac{c^2}{v_1^2} - 1 \right)}_{>0}}} \stackrel{v_1 \rightarrow c}{\Rightarrow} \frac{M}{d} \rightarrow \infty$$

Pour la même raison que celle mentionnée ci-dessus, ce cas n'est à nouveau physiquement pas admissible.

¹² Nous avons ici utilisé le fait que $\lim_{v_1 \rightarrow c} r_1 = d$, ce résultat étant démontré dans l'annexe D.

$A > 0$

Cette condition implique que :

$$\frac{M}{r_1} < \frac{c^2}{\sqrt{G\left(\frac{c^2}{v_1^2} - 1\right)}} \stackrel{v_1 \rightarrow c}{\Rightarrow} \frac{M}{d} < \infty$$

>0

Ce cas est physiquement admissible, contrairement aux deux autres, puisqu'il implique un rapport M/d fini, même dans le cas d'une particule dont la vitesse tend vers c . Par conséquent, les deux solutions (60) de l'équation caractéristique (59) sont des *nombres complexes*, que l'on écrit donc sous la forme :

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\underbrace{A}_{>0}} = \pm \sqrt{-1} \sqrt{A} = \pm i \sqrt{A}$$

où i est tel que $i^2 = -1$. On a donc :

$$\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{A} \quad (62)$$

où $A > 0$.

Si l'équation caractéristique (58) a deux solutions complexes de la forme $\lambda_{1,2} = p \pm qi$, alors l'équation différentielle (57) qui lui est associée a pour solution :

$$y(x) = e^{px}(c_1 \cos(qx) + c_2 \sin(qx))$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration que l'on détermine par les conditions aux limites de la fonction $y(x)$. Dans notre situation, nous voyons en (62) que $p = 0$ et $q = \sqrt{A}$, où $A > 0$. La solution de l'équation différentielle (56) est donc :

$$u_1(\theta) = c_1 \cos(\sqrt{A}\theta) + c_2 \sin(\sqrt{A}\theta) \quad (63)$$

Nous utilisons ici l'identité trigonométrique suivante :

$$a \cos(x) + b \sin(x) = C \cos(x - \varphi)$$

où $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = a/C$ et $\sin(\varphi) = b/C$, donc $\tan(\varphi) = b/a$.

En appliquant cette identité à (63), on obtient :

$$u_1(\theta) = C \cos(\sqrt{A}\theta - \varphi) \quad (64)$$

où $C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ et φ tel que $\tan(\varphi) = c_2/c_1$.

En substituant (64) et (55) dans (54), on obtient la solution générale de l'équation différentielle (52) :

$$\begin{aligned} u(\theta) &= \frac{B}{A} + C \cos(\sqrt{A}\theta - \varphi) \\ &= \frac{B}{A} \left(1 + \frac{AC}{B} \cos(\sqrt{A}\theta - \varphi) \right) \end{aligned} \quad (65)$$

En se souvenant du changement de variable effectué précédemment, à savoir $u = 1/r$, cela donne :

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{B}{A} \left(1 + \frac{AC}{B} \cos(\sqrt{A}\theta - \varphi) \right)$$

ou encore :

$$r(\theta) = \frac{\frac{A}{B}}{1 + \frac{AC}{B} \cos(\sqrt{A}\theta - \varphi)} \quad (66)$$

où A et B sont donnés en (53) alors que C et φ sont donnés à la suite de (64) et dépendent des constantes d'intégration c_1 et c_2 à déterminer par les conditions aux limites de la fonction $r(\theta)$.

En notant :

$$\begin{aligned} p &\equiv \frac{A}{B} \\ e &\equiv \frac{AC}{B} \\ \omega &\equiv \sqrt{A} \end{aligned} \quad (67)$$

(66) s'écrit :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\omega\theta - \varphi)} \quad (68)$$

(68) est la solution générale de l'équation différentielle (52), c'est-à-dire de l'équation du mouvement du problème de Kepler en mécanique relativiste. Cette solution (68) décrit une courbe appelée *conique*, de demi-paramètre p et d'excentricité e , dont le *foyer* O est situé au centre de la masse M (le centre de force). Nous donnons dans la section qui suit quelques précisions concernant les coniques.

En choisissant l'*axe focal* de la conique (son axe de symétrie) pour axe polaire de notre système de coordonnées polaires $(r; \theta)$ (dont le centre de la masse M a été choisi pour pôle O), $\varphi = 0$ dans (68). Avec ce choix en effet, $r(\theta = 0)$ doit être minimal¹³ et ceci est satisfait si

¹³ Cf. la figure 8 de la section suivante pour le constater.

$\cos(\omega\theta - \varphi)$ est maximal et vaut donc 1 pour $\theta = 0$, comme on le voit en (68). Ceci impose donc $\varphi = 0$. La solution (68) s'écrit finalement :

$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\omega\theta)}} \quad (69)$$

7. Intermède sur les coniques

Définition d'une conique

Une **conique** est une courbe plane définie géométriquement par le lieu des points P (du plan) tels que le rapport des distances à un point O fixé appelé **foyer** et à une droite Δ fixée appelée **directrice**, est constant. La valeur de ce rapport est appelée l'**excentricité** de la conique et est notée e (cf. fig. 5) :

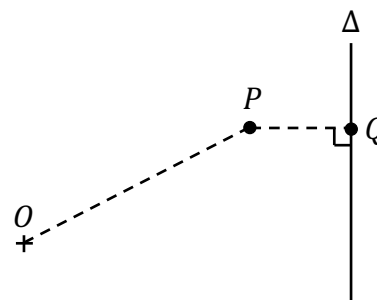


Fig. 5 Définition d'une conique.

$$\frac{PO}{PQ} = e \quad (70)$$

Équation d'une conique

En choisissant pour pôle le foyer O de la conique et pour axe polaire son **axe focal**, c'est-à-dire la perpendiculaire à la directrice Δ passant par le foyer O (cf. fig. 6), on peut montrer que l'équation d'une conique en coordonnées polaires (r, θ) est donnée par :

$$r(\theta) = \frac{es}{1 + e \cos \theta} \quad (71)$$

où s est la distance $\delta(O; \Delta)$ entre le foyer O de la conique et sa directrice Δ (cf. fig. 6).

En posant $p \equiv es$, l'équation (71) donne :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (72)$$

où p est appelé **demi-paramètre** de la conique qui, par définition, est la distance entre la conique et son foyer O , cette distance étant mesurée perpendiculairement à l'axe polaire. Nous voyons dans l'équation (72) de la conique que $p = r(\theta = \pi/2)$. La figure 7 illustre cette définition.

Une conique est ainsi caractérisée par deux paramètres, à savoir p et e .

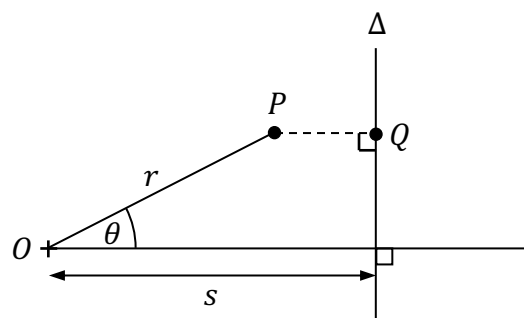


Fig. 6 Choix du pôle et de l'axe polaire.

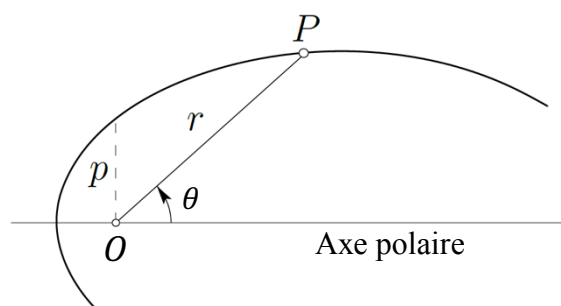


Fig. 7 Définition du demi-paramètre.

Les trois types de coniques

On peut montrer que l'excentricité e détermine le genre de la conique :

- $0 \leq e < 1$: la conique est une *ellipse* (un *cercle* pour $e = 0$)
- $e = 1$: la conique est une *parabole*
- $e > 1$: la conique est une *hyperbole*

La figure 8 ci-dessous illustre ces trois cas de figure.

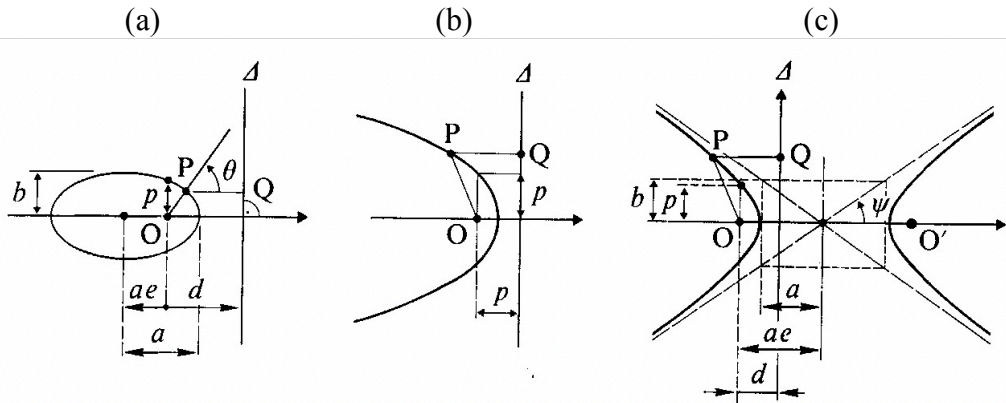


Fig. 8 Coniques de foyer O : (a) ellipse ; (b) parabole ; (c) hyperbole

Une conique peut aussi être caractérisée par deux autres paramètres ; son **demi-grand axe** noté a , et son **demi-petit axe** noté b . Ces deux paramètres sont indiqués sur les figures 8 (a) et (c). On peut montrer que les paramètres p et e sont liés aux paramètres a et b selon les formules suivantes¹⁴ :

$$\begin{aligned}
 & a \text{ et } b \text{ en fonction de } p \text{ et } e \\
 & a = \frac{p}{|1 - e^2|} \\
 & b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}
 \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned}
 & p \text{ et } e \text{ en fonction de } a \text{ et } b \\
 & p = \frac{b^2}{a} \\
 & e^2 = 1 \mp \frac{b^2}{a^2}
 \end{aligned} \tag{74}$$

Où, dans la deuxième équation de (74), le signe supérieur (–) correspond au cas de l’ellipse et le signe inférieur (+), au cas de l’hyperbole.

Dans le cas de l’hyperbole, nous voyons sur la figure 8 (c) que l’angle ψ entre l’asymptote et l’axe polaire est donné par :

$$\tan \psi = \frac{b}{a} \tag{75}$$

En substituant dans (75) les expressions (73) de a et b , on obtient l’angle ψ en fonction du paramètre e :

$$\tan \psi = \sqrt{|1 - e^2|} \tag{76}$$

¹⁴ Les paramètres a et b apparaissent dans les équations en *coordonnées cartésiennes* de l’ellipse et de l’hyperbole.

8. Conditions aux limites

Pour étudier l'excentricité e de la trajectoire, laquelle est donnée en (67) par l'expression $e = AC/B$, il faut déterminer le facteur C à l'aide des conditions aux limites de la fonction $r(\theta)$ décrivant la trajectoire.

Notre choix d'axe polaire nous a conduit à $\varphi = 0$. De plus, nous savons de (64) que $C = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ et que φ est tel que $\tan(\varphi) = c_2/c_1$. On a donc $c_2/c_1 = \tan(0) = 0 \Rightarrow c_1 \neq 0$ et $c_2 = 0$. Par conséquent, $C = c_1$ et $e = Ac_1/B$. Pour alléger la notation et éviter toutes confusion entre la constante d'intégration c_1 et la vitesse de la lumière dans le vide c , nous noterons dans la suite $a \equiv c_1$, de sorte que l'excentricité e s'exprime alors :

$$e = a \frac{A}{B} \quad (77)$$

où a est une constante d'intégration à déterminer à l'aide des conditions aux limites de la fonction $r(\theta)$ et A, B sont données en (53) et déterminées, rappelons-le, par les constantes du mouvement E_0 et l_0 . En outre, en insérant (77) dans (67) on a $p = e/a$ et l'équation (69) de la trajectoire s'écrit alors :

$$r(\theta) = \frac{e}{a(1 + e \cos(\omega\theta))} \quad (78)$$

Nous supposons connue et notons r_1 la distance minimale (la coordonnée radiale minimale) entre le centre de force et la trajectoire. Notre choix d'axe polaire impose une distance minimale pour un angle nul (pour une coordonnée angulaire nulle), comme l'indique la figure 9 ci-contre. On impose donc $r = r_1$ pour $\theta = 0$ dans l'équation (78) de la trajectoire, ce qui donne :

$$r_1 = \frac{e}{a(1 + e)}$$

D'où :

$$a = \frac{e}{r_1(1 + e)} \quad (79)$$

En substituant (79) dans (77), on obtient :

$$e = \frac{e}{r_1(1 + e)} \frac{A}{B}$$

D'où :

$$e = \frac{1}{r_1} \frac{A}{B} - 1 \quad (80)$$

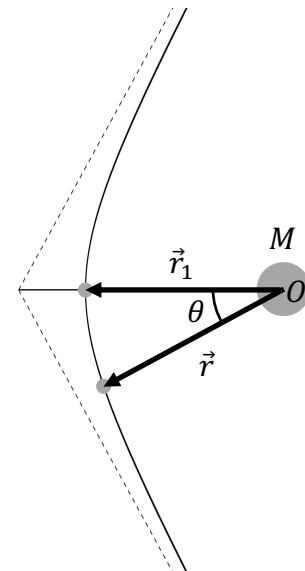


Fig. 9 En $\theta = 0$, la distance $r = r_1$ est minimale.

où r_1 est supposée connue et A, B sont donnés en (53).

Excentricité et détermination de la trajectoire

Il faut maintenant exprimer l'excentricité e en fonction des constantes du mouvement E_0 et l_0 . Pour ce faire, il s'agit d'expliciter les facteurs A, B dans (80) à l'aide de (53). Il vient :

$$e = \frac{1 - \frac{G^2 M^2 m^2}{l_0^2 c^2}}{r_1 \left(\frac{GMm^2}{l_0^2} \left(1 + \frac{E_0}{mc^2} \right) \right)} - 1 \quad (81)$$

Quelques manipulations algébriques conduisent à :

$$e = \frac{1}{r_1} \left(\frac{l_0^2}{GMm^2 + \frac{GMm}{c^2} E_0} - \frac{GMm}{mc^2 + E_0} \right) - 1 \quad (82)$$

Nous devons maintenant expliciter les constantes du mouvement E_0 et l_0 dont dépend e .

Pour l'énergie, on a d'après (36) et (50) :

$$E_0 = (\gamma - 1)mc^2 - \frac{GMm}{r} \quad (83)$$

où, rappelons-le, $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - (\|\vec{v}\|/c)^2}$.

Nous voyons dans (83) que l'énergie cinétique est maximale lorsque l'énergie potentielle (négative) est minimale. C'est le cas lorsque r est minimal, c'est à dire en \vec{r}_1 .

L'énergie cinétique (relativiste) d'une particule étant une fonction strictement croissante de la vitesse de cette dernière (cf. fig. 10), cela signifie que la vitesse de la particule est, elle aussi, maximale en \vec{r}_1 .

Il faut ici prendre en compte le fait que la relativité restreinte impose une limite maximale à toute vitesse, cette limite étant c . On devra donc exiger que c est à la position \vec{r}_1 de sa trajectoire que la particule approche la vitesse c . C'est donc en \vec{r}_1 que nous exprimons les valeurs des constantes du mouvement E_0 et l_0 .

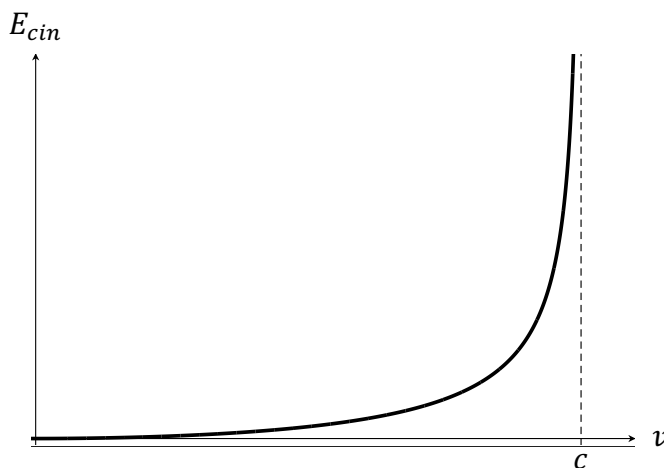


Fig. 10 L'énergie cinétique $E_{cin} = (\gamma - 1)mc^2$ d'une particule est une fonction strictement croissante de sa vitesse v .

En \vec{r}_1 , l'énergie E_0 vaut :

$$E_0 = (\gamma_1 - 1)mc^2 - \frac{GMm}{r_1} \quad (84)$$

où $\gamma_1 \equiv 1/\sqrt{1 - (\|\vec{v}_1\|/c)^2}$ avec $\vec{v}_1 \equiv \vec{v}(\vec{r}_1)$.

Pour la norme l_0 du moment cinétique, rappelons la définition relativiste de ce vecteur, donnée en (4) : $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\gamma m \vec{v})$. La norme du vecteur moment cinétique est donc donnée par $\|\vec{l}\| \equiv l = \gamma m r v \sin \varphi$, où φ est l'angle entre les vecteurs \vec{r} et \vec{v} (ou \vec{p}). À la position \vec{r}_1 de la trajectoire, le vecteur vitesse \vec{v}_1 de la particule est perpendiculaire à son vecteur position \vec{r}_1 . Ainsi, $\varphi_1 \equiv \varphi(\vec{r}_1) = \pi/2$ (cf. fig. 11). Par conséquent, $\sin \varphi_1 = 1$ et l_0 vaut :

$$l_0 = l_1 = m r_1 \gamma_1 v_1 \quad (85)$$

où $\vec{l}_1 \equiv \vec{l}(\vec{r}_1)$. En substituant les expressions des constantes E_0 et l_0 données respectivement en (84) et (85) dans l'expression (82) de l'excentricité e , on obtient :

$$e = \frac{1}{r_1} \left(\frac{(m r_1 \gamma_1 v_1)^2}{GMm^2 + \frac{GMm}{c^2} \left((\gamma_1 - 1)mc^2 - \frac{GMm}{r_1} \right)} - \frac{GMm}{mc^2 + \left((\gamma_1 - 1)mc^2 - \frac{GMm}{r_1} \right)} \right) - 1$$

Quelques calculs élémentaires permettent d'obtenir une expression plus simple :

$$e = \frac{\frac{1}{GM} r_1^2 \gamma_1^2 \beta_1^2 c^2 - \frac{GM}{c^2}}{r_1 \gamma_1 - \frac{GM}{c^2}} - 1$$

où $\beta_1 \equiv v_1/c$ et $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - \beta_1^2}$

On voit dans l'équation ci-dessus que l'excentricité e est indépendante de la masse m de la particule. Pour une masse M fixée, e ne dépend que de la distance minimale d'approche r_1 de la particule et de la vitesse $v_1 = \beta_1 c$ de cette dernière à cette distance r_1 .

Afin de déterminer le type de conique que décrit la trajectoire de la particule si sa vitesse en \vec{r}_1 est proche de c , écrivons cette équation sous la forme :

$$e = \frac{\gamma_1^2 \left(\frac{1}{GM} r_1^2 \beta_1^2 c^2 - \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{GM}{c^2} \right)}{\gamma_1 \left(r_1 - \frac{1}{\gamma_1} \frac{GM}{c^2} \right)} - 1 \quad (86)$$

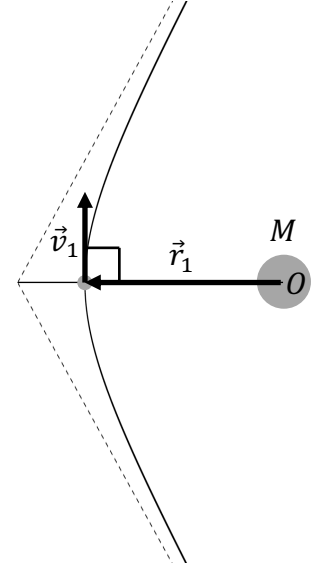


Fig. 11 Au point de la trajectoire le plus proche du centre de force, les vecteurs \vec{r}_1 et \vec{v}_1 sont perpendiculaires.

Ce qui donne :

$$e = \frac{\gamma_1 \left(\frac{1}{GM} r_1^2 \beta_1^2 c^2 - \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{GM}{c^2} \right)}{r_1 - \frac{1}{\gamma_1} \frac{GM}{c^2}} - 1 \quad (87)$$

Pour une particule dont la vitesse v_1 tend vers celle de la lumière, c'est-à-dire pour $v_1 \rightarrow c$, on a $\beta_1 \rightarrow 1$ et $\gamma_1 \rightarrow \infty$. Dans ce cas, l'expression (87) de e tend vers :

$$e \underset{v_1 \rightarrow c}{\approx} \frac{c^2}{GM} r_1 \gamma_1 \beta_1^2 - 1 = \frac{1}{GM} r_1 \gamma_1 v_1^2 - 1 \quad (88)$$

Par conséquent, pour v_1 suffisamment proche de c , le facteur γ_1 devient arbitrairement grand et il en est de même pour l'excentricité e . Ainsi :

$$\boxed{v_1 \rightarrow c \Rightarrow e > 1}$$

La trajectoire d'une particule dont la vitesse avoisine c est donc une hyperbole.

9. Calcul de l'angle de déflexion

L'angle de déflexion α recherché s'exprime en fonction de l'angle ψ associé à la trajectoire hyperbolique (cf. fig. 8(c)), selon la relation suivante, comme l'indique la figure 12 :

$$\boxed{\alpha + 2\psi = \pi} \quad (89)$$

L'équation (76), montre que l'angle ψ dépend de l'excentricité e :

$$\tan \psi = \sqrt{|1 - e^2|}$$

l'expression de cette dernière étant donnée en (88) pour v_1 proche de c .

Pour appliquer la formule ci-dessus, commençons par calculer e^2 à partir de l'expression (88) de l'excentricité. On a :

$$e = \frac{r_1 v_1^2}{GM} \gamma_1 - 1$$

D'où :

$$e^2 = \left(\frac{r_1 v_1^2}{GM} \gamma_1 - 1 \right)^2 = \left(\frac{r_1 v_1^2}{GM} \right)^2 \gamma_1^2 - 2 \frac{r_1 v_1^2}{GM} \gamma_1 + 1$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 - e^2 &= - \left(\frac{r_1 v_1^2}{GM} \right)^2 \gamma_1^2 + 2 \frac{r_1 v_1^2}{GM} \gamma_1 \\ &= \gamma_1^2 \left(- \left(\frac{r_1 v_1^2}{GM} \right)^2 + 2 \frac{r_1 v_1^2}{GM} \frac{1}{\gamma_1} \right) \end{aligned}$$

Le deuxième terme dans la parenthèse du membre de droite de l'équation ci-dessus tend vers 0 pour $v_1 \rightarrow c$ car alors $\gamma_1 \rightarrow \infty$. Ainsi :

$$1 - e^2 = - \left(\frac{r_1 v_1^2}{GM} \right)^2 \gamma_1^2 = - \left(\frac{r_1 \gamma_1 v_1^2}{GM} \right)^2 \quad (90)$$

Substituons (90) dans (76) :

$$\tan \psi = \sqrt{\left| - \left(\frac{r_1 \gamma_1 v_1^2}{GM} \right)^2 \right|} = \frac{r_1 \gamma_1 v_1^2}{GM} = \frac{c^2}{GM} r_1 \gamma_1 \beta_1^2 \quad (91)$$

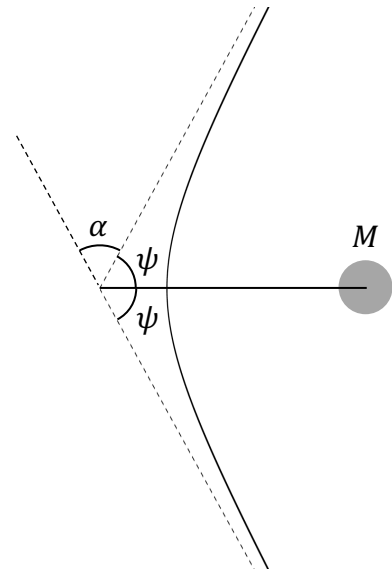


Fig. 12 Angle de déflexion α en fonction de l'angle ψ .

où l'on a utilisé $v_1 = \beta_1 c$ pour la dernière égalité ci-dessus. Explicitions le produit $\gamma_1 \beta_1^2$ apparaissant dans (91) :

$$\gamma_1 \beta_1^2 = \frac{\beta_1^2}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} = \beta_1^2 (1 - \beta_1^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (92)$$

Développons en série de Taylor-MacLaurin le terme $(1 - \beta_1^2)^{-\frac{1}{2}}$ apparaissant ci-dessus. Rappelons l'expression générale de cette série :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \quad (93)$$

On a :

$$f(\beta_1) = (1 - \beta_1^2)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(\beta_1) = \beta_1 (1 - \beta_1^2)^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$f''(\beta_1) = (1 - \beta_1^2)^{-\frac{3}{2}} + 3\beta_1^2 (1 - \beta_1^2)^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f''(0) = 1$$

Le développement en série limité à l'ordre 2 du terme $(1 - \beta_1^2)^{-\frac{1}{2}}$ donne ainsi :

$$f(\beta_1) = (1 - \beta_1^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\beta_1^2 \quad (94)$$

En substituant (94) dans (92), on obtient :

$$\gamma_1 \beta_1^2 = \beta_1^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta_1^2\right) = \beta_1^2 + \frac{1}{2}\beta_1^4 \approx \beta_1^2 \quad (95)$$

où la dernière égalité ci-dessus est due au fait que $\beta_1 < 1$ (puisque $v_1 < c$) et que l'on a négligé le terme d'ordre 4. En substituant (95) dans (91), on a :

$$\tan \psi = \frac{c^2}{GM} r_1 \beta_1^2 = \frac{1}{GM} r_1 v_1^2 \quad (96)$$

De (89) on a :

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \psi$$

D'où :

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \tan \psi \quad (97)$$

En substituant (96) dans (97), on obtient :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r_1 v_1^2}{GM} \quad (98)$$

En utilisant l'identité trigonométrique suivante :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

L'équation (98) devient :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{GM}{r_1 v_1^2} \quad (99)$$

Cette équation est l'expression de l'angle de déflexion α d'une particule dont la vitesse en \vec{r}_1 a pour norme v_1 proche de c , cette déflexion étant due au champ gravitationnel central produit par une masse M (le centre de force). On remarque que cet angle de déflexion est, comme pour l'excentricité, indépendant de la masse m de la particule.

10. Angle de déflexion pour un photon

Pour obtenir l'angle de déflexion pour un photon, il faut passer à la limite $v_1 = c$ dans (99). On montre dans l'annexe D que dans ce cas, $r_1 = d$, où d est le paramètre d'impact défini sur la fig. 1, c'est-à-dire $\lim_{v_1 \rightarrow c} r_1 = d$. On obtient alors :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{GM}{dc^2} \quad (100)$$

Approximation des petits angles

Pour de petits angles α , (100) devient¹⁵ :

$$\frac{\alpha}{2} \approx \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{GM}{dc^2}$$

Et finalement :

$$\boxed{\alpha = \frac{2GM}{c^2 d}} \quad (101)$$

Nous obtenons en (101) la solution recherchée dans ce travail, à savoir l'angle de déflexion d'un photon (d'un rayon lumineux) se propageant dans un champ gravitationnel central produit par une masse M sphérique.

¹⁵ Car $\tan(x) \approx x$ pour $x \ll 1$

11. Discussion de la solution

La solution obtenue est la même que celle prédite par la mécanique newtonienne ! Ce résultat est pour le moins surprenant puisque la mécanique relativiste conduit à des résultats très différents de ceux de la mécanique newtonienne pour des particules se déplaçant à des vitesses proches de celle de la lumière. Dans la situation étudiée ici, l'approche newtonienne est même plus satisfaisante que l'approche relativiste dans le sens où dans cette dernière, comme mentionné plus haut, nous intégrons dans les calculs une interaction gravitationnelle se propageant à vitesse infinie, ce qu'interdit la théorie de la relativité restreinte. En mécanique newtonienne en revanche, aucune limite supérieure n'est imposée aux vitesses. Ainsi, les lois de la dynamique et de la gravitation de Newton forment conjointement une théorie cohérente d'une part et une bonne approximation de la gravitation einsteinienne (relativité générale) dans une situation où le champ gravitationnel est faible¹⁶ d'autre part.

Un autre problème conceptuel qui se pose dans l'approche relativiste proposée dans ce travail est la question de la masse de la particule déviée. En effet, la mécanique relativiste impose $v = c \Leftrightarrow m = 0$: une particule se déplace à la vitesse de la lumière si et seulement si sa masse est nulle. Mais, dans ce cas, la force gravitationnelle newtonienne n'agit pas sur celle-ci et ne peut pas la dévier de sa trajectoire rectiligne. Dans nos développements, nous avons évité cet écueil par une pirouette ! En effet, l'angle de déflexion est complètement déterminé par l'excentricité de la trajectoire, laquelle ne dépend pas de la masse de la particule déviée, comme on peut le constater en (87). Nous n'avons ainsi pas eu à nous préoccuper de la masse de la particule déviée en faisant tendre sa vitesse vers c .

Nous récapitulons dans le tableau ci-dessous la solution de l'angle de déflexion fournie par chacune des trois approches, la théorie de la relativité générale, la mécanique newtonienne et la mécanique relativiste :

Théorie	Angle de déflexion
Relativité générale	$\alpha = \frac{4G M}{c^2 d}$
Mécanique newtonienne	$\alpha = \frac{2G M}{c^2 d}$
Mécanique relativiste	

¹⁶ La condition de champ gravitationnel faible est en effet assurée par le fait que la solution est obtenue dans l'approximation des petits angles de déflexion, en mécanique newtonienne comme en relativité générale.

12. Application numérique

Calculons l'angle de déflexion d'un rayon lumineux passant très proche du Soleil (rasant la surface solaire), à l'aide des deux solutions récapitulées dans le tableau ci-dessus. Dans ce cas, le paramètre d'impact $d \approx r_1 = R$ où R est le rayon du Soleil (cf. fig. 1) et M sa masse. Les valeurs numériques de ces grandeurs et des constantes G et c sont¹⁷ :

$$M = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$R = 6,95 \cdot 10^8 \text{ m}$$

$$G = 6,6738 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$$

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Pour pouvoir utiliser (101), il faut que $\tan(\alpha/2) \ll 1$. Vérifions que c'est bien le cas. D'après (100), on a :

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{GM}{dc^2} = \frac{GM}{Rc^2} \\ &= \frac{6,6738 \cdot 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2} \cdot 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{6,95 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot (2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})^2} \\ &= 2,15 \cdot 10^{-6} \ll 1 \end{aligned}$$

On peut donc utiliser (101) pour calculer l'angle de déflexion. Les calculs donnent :

$$\text{Relativité générale}^{18} : \quad \alpha = 8,50 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 4,87 \cdot 10^{-4} \text{ deg} = 1,75''$$

$$\text{Mécanique newtonienne et relativiste} : \quad \alpha = 4,25 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 2,44 \cdot 10^{-4} \text{ deg} = 0,88''$$

Le résultat identique de la mécanique newtonienne et de la mécanique relativiste ne diffère que d'un facteur 2 de celui de la relativité générale. Remarquons que ces résultats sont de l'ordre de la seconde d'arc, c'est-à-dire du dix millième de degré, ce qui correspond à un angle extrêmement petit !

¹⁷ Source : *Formulaires et tables*, Commissions romandes de mathématique, de physique et de chimie, édition 2017.

¹⁸ $\alpha = 1,75''$ est le résultat indiqué sur la figure de la couverture.

13.Note historique

En 1915, la théorie de la relativité générale que vient de publier Albert Einstein n'est pas aussitôt acceptée. On doute que la structure de l'Univers soit un espace-temps courbé par la matière. La modification de la géométrie de l'espace-temps induite par le Soleil dans son voisinage devrait alors perturber la trajectoire des rayons lumineux qui rasant sa surface et les dévier. D'après la théorie d'Einstein, un observateur sur Terre recevant dans son télescope (ou ses yeux) des rayons lumineux issus d'une étoile lointaine et ayant passé à proximité d'un corps massif comme le Soleil, constatera que ces rayons proviennent d'une autre direction que celle qu'il observerait si ceux-ci n'avaient pas passé à proximité du Soleil. En présence du Soleil entre la Terre et l'étoile lointaine, l'observateur terrestre localisera donc cette dernière à une position différente de celle observée en l'absence du Soleil (cf. fig. 13).

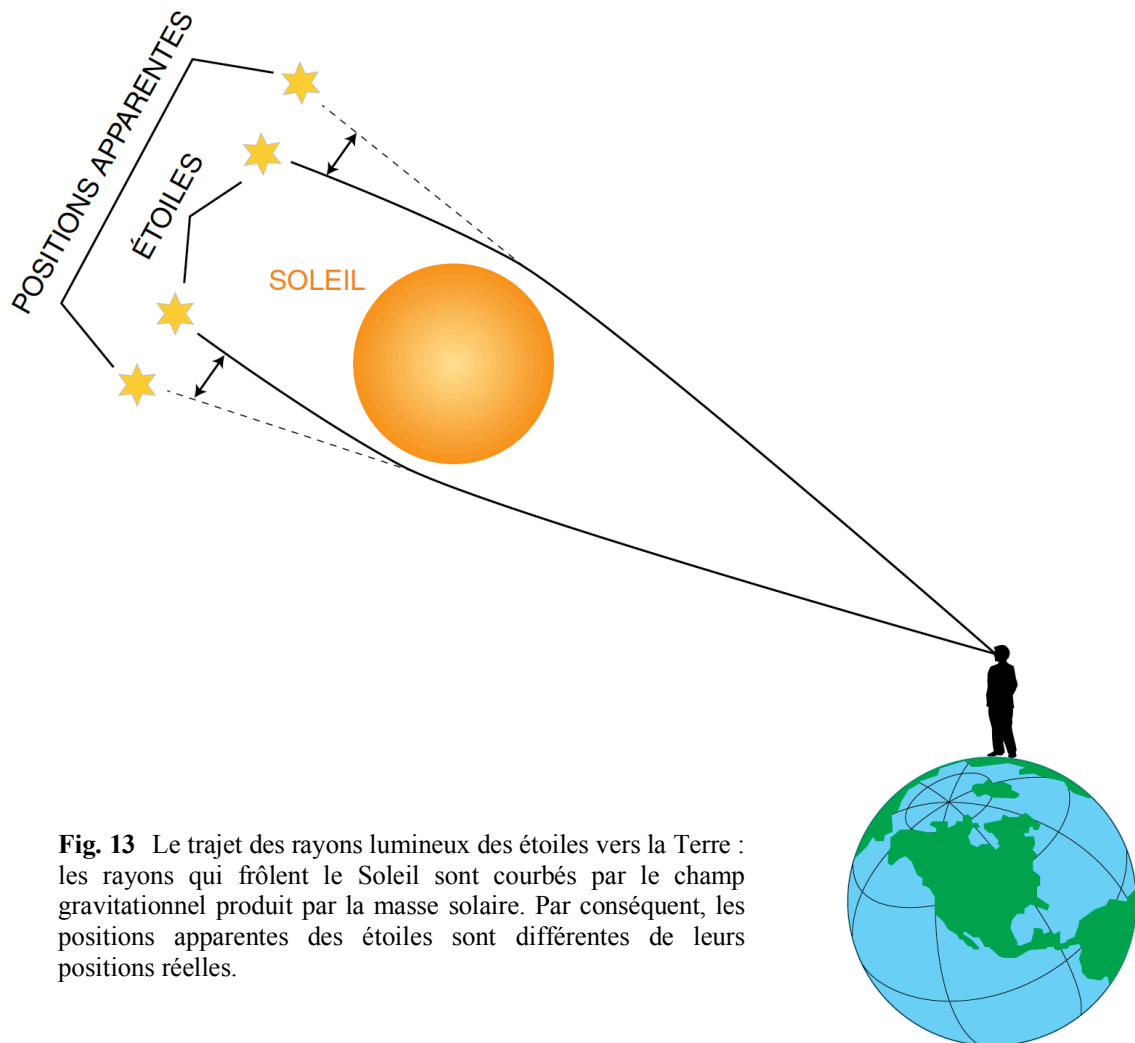


Fig. 13 Le trajet des rayons lumineux des étoiles vers la Terre : les rayons qui frôlent le Soleil sont courbés par le champ gravitationnel produit par la masse solaire. Par conséquent, les positions apparentes des étoiles sont différentes de leurs positions réelles.

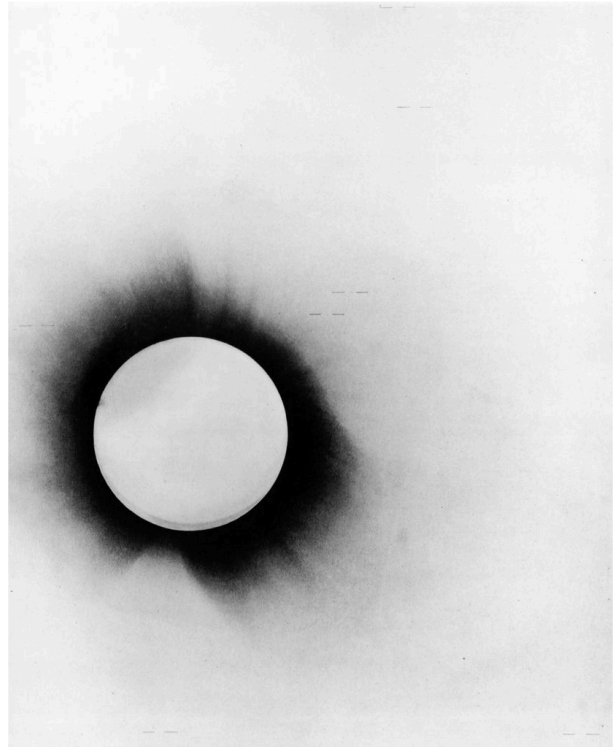
La vérification expérimentale de cet effet sera un moment crucial pour la théorie et pour son inventeur. Au bord du Soleil, la valeur théorique de cette déviation prédite par la théorie d'Einstein est ridiculement petite – 1,75 secondes d'arc – mais reste dans le domaine de résolution des grands télescopes de l'époque et remet néanmoins en question la théorie de la gravitation de Newton et l'espace absolu de la mécanique newtonienne. Afin de mesurer cette infime déviation, il faut photographier les étoiles situées à proximité du disque solaire, puis les photographier à nouveau en l'absence du Soleil. Toutefois, de la Terre, on ne peut pas observer simultanément le Soleil et les étoiles lointaines, la faible luminosité des deuxièmes étant imperceptible par rapport à la forte luminosité du premier ; seule une éclipse totale du Soleil par la Lune permet une telle observation. Il s'agit de photographier les étoiles lointaines en présence du Soleil éclipsé situé entre celles-ci et la Terre, puis photographier les mêmes étoiles en l'absence du Soleil, des mois plus tard. La comparaison des positions respectives des étoiles figurant sur les photographies prises dans ces deux situations permet alors de déduire expérimentalement l'angle de déflexion des rayons lumineux issus des étoiles lointaines et passant à proximité du Soleil. Des observations et des mesures très délicates qui seront tentées lors de l'éclipse totale de Soleil du 29 mai 1919.

Le britannique Arthur Eddington, directeur de l'observatoire de Cambridge, est très tôt séduit par la théorie d'Einstein. Il parvient à convaincre l'astronome royal Frank Dyson d'envoyer, en mai 1919, deux expéditions scientifiques sous le trajet de l'éclipse. L'une ira sur la petite île de Principe, dans le golfe de Guinée au large de la côte atlantique de l'Afrique, et l'autre dans le village de Sobral, au Brésil. Le champ d'étoiles de l'amas des Hyades devant lequel se produira l'éclipse semble particulièrement favorable pour de telles mesures, car ces étoiles seront brillantes, nombreuses et bien réparties autour du Soleil au moment de l'éclipse.

Sur l'île de Principe, Arthur Eddington et Edwin Cottingham, tous deux de l'université de Cambridge, obtiennent en tout seize photographies dont deux seulement seront utilisables en raison du mauvais temps. À Sobral, Andrew Crommelin et Charles Davidson, de l'observatoire de Greenwich, ont emporté avec eux deux cœlostats,¹⁹ le premier fournissant dix-neuf photographies dont plusieurs seront floues. Leur deuxième instrument produira huit photographies utilisables. La météo n'a pas favorisé l'expédition et les plaques photographiques ne sont pas toutes excellentes, de sorte que leur analyse ne sera pas simple. La précision est discutable, comme les conclusions que l'on peut en tirer. Pourtant, celle d'Eddington et de Dyson est sans appel : la théorie d'Einstein est confirmée.

¹⁹ Un cœlostas, ou héliostas, est un système optique qui permet de suivre la course du Soleil.

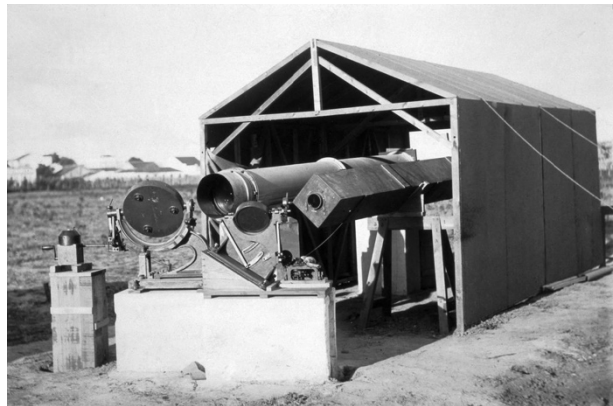
Fig. 14 « Cette plaque photographique a enregistré (en négatif) l'image de la couronne (en noir) entourant le Soleil, caché ici par la Lune (disque blanc) pendant l'éclipse solaire totale du 29 mai 1919. Cinq étoiles sont visibles sur le cliché dont deux proches du disque solaire, repérées chacune par un petit trait horizontal de part et d'autre de son image. Sept étoiles au total ont été identifiées sur les plaques. On a comparé leurs positions respectives avec celles repérées sur des clichés pris trois mois plus tard à Oxford. Les différences mesurées ont permis de calculer précisément l'effet, sur le trajet de la lumière issue des étoiles, de la courbure locale de l'espace due à la masse du Soleil. Ce cliché a été pris par l'expédition dirigée par Arthur Eddington, qui s'était installée sur l'île de Principe, au large des côtes ouest-africaines, pour observer cette éclipse totale. »



Eddington parvient à déduire pour l'angle de déflexion les valeurs $1,98 \pm 0,16$ secondes d'arc à partir des mesures effectuées à Sobral, et $1,61 \pm 0,40$ secondes d'arc à partir de celles effectuées sur l'île de Principe. Ces résultats sont compatibles avec la prédiction théorique d'Einstein et excluent confortablement une déflexion nulle, ainsi que le résultat newtonien de 0,88 secondes d'arc.

Dans l'annexe E, nous présentons une méthode permettant de calculer l'angle de déflexion des rayons lumineux issus d'une étoile lointaine, à partir d'une photographie telle que celle apparaissant sur la figure 14 ci-dessus.

Fig. 15 « Transportées depuis l'Angleterre, deux lunettes astronomiques ont été installées à Sobral (Brésil) par l'expédition en charge d'observer l'éclipse solaire totale de 1919. Ces deux instruments sont équipés d'un objectif formé d'une lentille, l'une de 13 pouces d'ouverture (diaphragmée à 8 pouces pour améliorer la netteté), l'autre de 4 pouces. Ils ont permis d'obtenir des clichés de ce phénomène. Ces deux lunettes immobiles sont en position horizontale, et les deux miroirs mobiles (visibles au premier plan) compensent le mouvement de rotation de la Terre et maintiennent les faisceaux lumineux issus du Soleil dans l'axe de chacune des lunettes. »



Le 6 novembre 1919 se tient à Londres une réunion historique, à laquelle participent la *Royal Society* et la *Royal Astronomical Society* (cf. l'article du *New York Times* du 10 novembre 1919 ci-contre). L'annonce des résultats d'Eddington suscite une vive impression : Newton, dit-on, serait tombé de son piédestal. La nouvelle se répand immédiatement. Le mythe d'Einstein est né ; il devient une légende vivante, un oracle vénérable bien qu'incompréhensible. Einstein est assailli par les journalistes anglais ou allemands qui l'encensent. Les capitales du monde entier l'accueillent.

Cependant, de nombreux physiciens font grise mine ; devront-ils se plonger dans les mathématiques absconses et l'espace courbe de la théorie de la relativité générale ? La polémique rebondit dix ans plus tard, lorsque les résultats de l'expédition de l'éclipse solaire de Sumatra ne corroborent pas ceux de 1919. Eddington lui-même se met à douter. D'autant que la vérification d'un autre test de la théorie, le décalage de la fréquence d'une onde lumineuse dans un champ de gravitation, n'est guère convaincante. Le doute provient du manque de précision des mesures. Il ne sera levé qu'en 1959, grâce à une expérience dans le champ de gravitation terrestre.

Depuis lors, la théorie d'Einstein n'a jamais été prise en défaut. En 2003, lorsque le Soleil s'est interposé entre la Terre et la sonde américaine Cassini, les mesures ont permis de vérifier l'effet de déviation des rayons lumineux avec une précision presque dix mille fois supérieure à celle de 1919 !

LIGHTS ALL ASKEW IN THE HEAVENS

Men of Science More or Less
Agog Over Results of Eclipse
Observations.

EINSTEIN THEORY TRIUMPHS

Stars Not Where They Seemed
or Were Calculated to be,
but Nobody Need Worry.

A BOOK FOR 12 WISE MEN

No More in All the World Could
Comprehend It, Said Einstein When
His Daring Publishers Accepted It.

Special Cable to THE NEW YORK TIMES.
LONDON, Nov. 9.—Efforts made to get the world intelligible to the scientific public the Einstein theory of light proved by the eclipse expedition so far have not been very successful. The lay observer was dumfounded at a recent meeting of the Royal Society and Royal Astronomical Society, Sir James Thompson, President of the Royal Society, declared it is not possible to put Einstein's theory into intelligible words, not at the same time Thompson added:

"The results of the eclipse expedition demonstrating that the rays of light from the stars are bent or deflected from their normal course by other aerial bodies acting upon them and consequently the inference that light has weight, form a most important contribution to the laws of cosmic space as since Newton laid down his principles." Thompson states that the difference between theories of cosmology are interested in a popular sense, and as they are partly unexplained and can only be expressed in strictly scientific terms he wishes to endeavor to detail them for the man in the street.

"What is easily understandable," he continued, "is that Einstein predicted the deflection of the starlight when it passed the sun, and the recent eclipse has provided a demonstration of the correctness of the prediction."

"His second theory as to the anomalous motion of the planet Mercury has also been verified, but his third prediction, which dealt with certain sun spots, is still indefinite."

Asked if recent discoveries meant a reversal of the laws of gravity as defined by Newton, Sir James said they held good for ordinary purposes, but in highly mathematical problems the new conceptions of Einstein, whereby space became warped or curved under certain circumstances, would have to be taken into account.

Four different observations which are included in this discovery and the necessity for making Einstein's theory more into account were noted by a member of the expedition, who stated that it meant, among other things, that two lines normally known as parallel are not eventually, that a circle is not really circular, that three angles of a triangle do not necessarily make the same total of two right angles.

"Enough has been said to show the importance of Einstein's theory, even if it cannot be expressed clearly in words," laughed the astronomer.

Dr. W. J. S. Lockyer, another astronomer, said:

"The discoveries, while very important, did not, however, affect anything on this earth. They do not personally concern ordinary human beings; only astronomers are affected. It has hitherto been understood that light traveled in a straight line. Now we find it travels in a curve. It therefore follows that any object, such as a star, is not necessarily in the direction in which it appears to be astronomically."

"This is very important, of course. The one thing a star may be a considerable distance further away than we have hitherto counted it. This will not affect navigation, but it means corrections will have to be made."

One of the speakers at the Royal Society's meeting suggested that Euclid was knocked out. Discoveries should not replace geometry, for it is pointed out that Euclid laid down the axiom that parallel straight lines, if produced ever so far, would not meet. He said nothing about light lines.

Some critics suggested that the Einstein theory is only a scientific version of the well-known legend that a coin in a basin of water is not on the surface it appears to be and ask what is new in the refraction of light.

Albert Einstein is a Swiss citizen, whose 28 years of age. After working in London as Professor of Mathematical Physics at the Berlin Polytechnic School and afterward at Prague University, he was elected a member of the Royal Prussian Academy of Sciences in Berlin at the outbreak of the war. Dr. Einstein's prediction of the German professors' manifesto approving of Germany's participation in the war, and at its conclusion he relinquished the citizenship. He had been living in Berlin for about six years.

When he offered his last important work to his publishers he warned them there were not more than twenty persons in the whole world who would understand it, but the publishers took the risk.

The New York Times
Published November 10, 1919
Copyright © The New York Times

Dans une lettre à l'astronome américain George Hale en 1913 (cf. fig. 16 ci-dessous), Einstein s'interroge sur la possibilité d'observer la déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil. La valeur théorique de cette déviation indiquée dans la lettre ci-dessous (0,84 secondes d'arc) est fautive et sera rectifiée à 1,75 secondes d'arc.

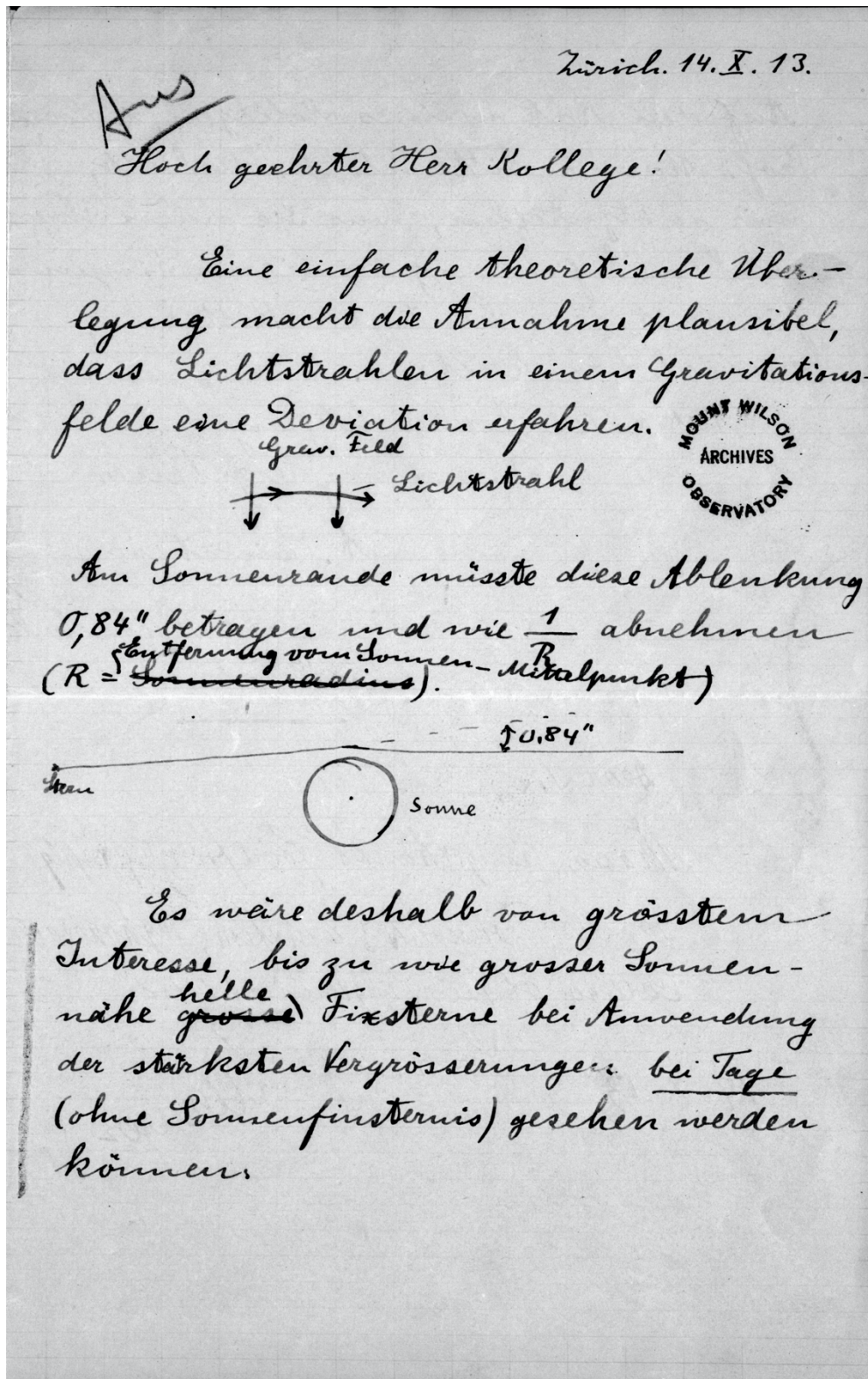


Fig. 16 Lettre d'Albert Einstein à George Hale en 1913.

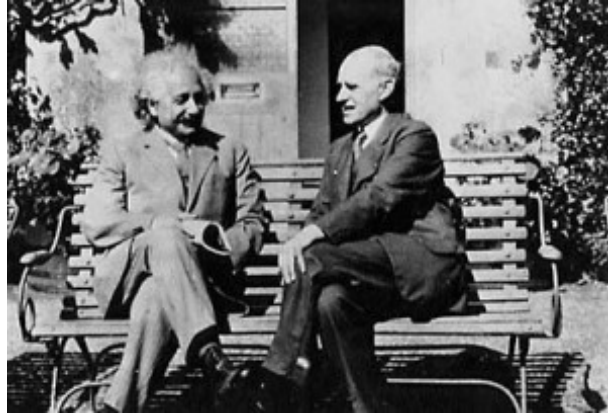


Fig. 17 Arthur Stanley Eddington (1882-1944) et Albert Einstein en 1930. Eddington avait vérifié expérimentalement la déviation de la lumière par les objets massiques, prédite théoriquement par Einstein.

14. Conclusion

L'approche newtonienne de la déflexion d'un rayon lumineux par une masse consiste à calculer dans un premier temps l'angle de déflexion d'une particule massive de vitesse inférieure à celle de la lumière, par une masse très supérieure à celle de la particule. Les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique permettent d'obtenir l'angle de déflexion, lequel est indépendant de la masse de la particule mais dépend de la vitesse de cette dernière. En faisant tendre cette vitesse vers celle de la lumière, on obtient l'angle de déflexion d'un photon (d'un rayon lumineux). Le résultat newtonien de cet angle de déflexion est remarquablement proche de celui prédit par la théorie de la relativité générale, puisqu'il n'en diffère que d'un facteur 2.

Le travail que nous avons mené ici a pour origine la question suivante : quel angle de déflexion obtiendrions-nous en employant la même approche qu'en mécanique newtonienne, mais dans le cadre de la mécanique relativiste, c'est-à-dire en utilisant les expressions de l'énergie et du moment cinétique de la théorie de la relativité restreinte pour exprimer la conservation de ces deux grandeurs ?

La mécanique relativiste n'a jamais été mise en défaut depuis sa publication par Albert Einstein en 1905 et toutes les expériences réalisées à ce jour, en particulier dans le domaine de la physique des particules à haute énergie, ont confirmé ses prédictions théoriques, reléguant ainsi la mécanique newtonienne à une théorie valable uniquement dans les situations où les vitesses en jeu sont négligeables par rapport à celle de la lumière dans le vide.

Pour cette raison, nous nous attendions à obtenir, dans le cadre de la mécanique relativiste, un angle de déflexion encore plus satisfaisant que celui de la mécanique newtonienne, c'est-à-dire plus proche encore de celui prédit par la théorie de la relativité générale. Quelle n'a pas été notre surprise et disons-le, notre déception, d'aboutir au terme de nos développements à un angle de déflexion identique à celui découlant de la mécanique newtonienne ! Qu'à cela ne tienne, notre travail n'a pas été inutile, car seul son aboutissement nous a permis de nous convaincre que l'apport de la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein élaborée au XX^e siècle, à la théorie de la gravitation d'Isaac Newton datant du XVII^e siècle, ne permet pas d'améliorer la prédiction de cette dernière associée aux lois du mouvement de Newton, du moins dans le cas de la déflexion d'un rayon lumineux par un champ gravitationnel.

15. Remerciements

Mes remerciements vont à Stephen Clark, mon inénarrable collègue. Nos discussions, toujours instructives, m'ont été bénéfiques dans la progression de cette étude et dans les perspectives qu'elle ouvre.

16. Annexes

A. Démonstration de l'équation (17)

À démontrer :

$$\|\vec{p}\| \frac{d\|\vec{p}\|}{dt} = \vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Démonstration :

$$\|\vec{p}\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{d\|\vec{p}\|}{dt} &= \frac{d}{dt} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \\ &= \frac{2p_x \frac{dp_x}{dt} + 2p_y \frac{dp_y}{dt} + 2p_z \frac{dp_z}{dt}}{2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{p_x \frac{dp_x}{dt} + p_y \frac{dp_y}{dt} + p_z \frac{dp_z}{dt}}{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(p_x; p_y; p_z) \cdot \left(\frac{dp_x}{dt}; \frac{dp_y}{dt}; \frac{dp_z}{dt} \right)}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \\ &= \frac{(p_x; p_y; p_z) \cdot \frac{d}{dt} (p_x; p_y; p_z)}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}} \\ &= \frac{\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}}{\|\vec{p}\|} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\|\vec{p}\| \frac{d\|\vec{p}\|}{dt} = \vec{p} \frac{d\vec{p}}{dt}$$

B. Démonstration de l'équation (39)

À démontrer :

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x; y) \\ &= \frac{d}{dt}(r \cos \theta ; r \sin \theta) \\ &= \left(\frac{d}{dt}(r \cos \theta); \frac{d}{dt}(r \sin \theta) \right) \\ &= \left(\underbrace{\frac{dr}{dt} \cos \theta + r(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dt}}_{v_x}; \underbrace{\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}}_{v_y} \right)\end{aligned}$$

On a d'autre part :

$$\|\vec{v}\|^2 = v_x^2 + v_y^2$$

Avec :

$$\begin{aligned}v_x^2 &= \left(\frac{dr}{dt} \cos \theta + r(-\sin \theta) \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 (\cos \theta)^2 - 2 \frac{dr}{dt} \cos \theta r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} + r^2 (\sin \theta)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ v_y^2 &= \left(\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \\ &= \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 (\sin \theta)^2 + 2 \frac{dr}{dt} \sin \theta r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} + r^2 (\cos \theta)^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2\end{aligned}$$

D'où :

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \underbrace{((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2)}_1 + 0 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \underbrace{((\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2)}_1$$

Et finalement :

$$\|\vec{v}\|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

C. Démonstration de l'équation (43)

À démontrer :

$$l_0 \equiv \|\vec{l}_0\| = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Démonstration :

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\gamma m \vec{v}) = \gamma m \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow (\vec{\omega} \times \vec{r}) \perp \vec{\omega} \text{ et } (\vec{\omega} \times \vec{r}) \perp \vec{r}$$

En combinant les expressions de \vec{l} et \vec{v} ci-dessus, on a :

$$\vec{l} = \gamma m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|\vec{l}\| &= \|\gamma m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\| = \gamma m \|\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\| \\ &= \gamma m \|\vec{r}\| \|\vec{\omega} \times \vec{r}\| \underbrace{\sin\left(\frac{\angle(\vec{r}; \vec{\omega} \times \vec{r})}{\frac{\pi}{2}}\right)}_1 \\ &= \gamma m \|\vec{r}\| \|\vec{\omega} \times \vec{r}\| = \gamma m \|\vec{r}\| \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\| \underbrace{\sin\left(\frac{\angle(\vec{\omega}; \vec{r})}{\frac{\pi}{2}}\right)}_1 \\ &= \gamma m \|\vec{r}\| \|\vec{\omega}\| \|\vec{r}\| = \gamma m \|\vec{r}\|^2 \|\vec{\omega}\| \end{aligned}$$

D'où :

$$\|\vec{l}\| = \gamma m \|\vec{r}\|^2 \|\vec{\omega}\|$$

En notation allégée, cela donne :

$$l = \gamma m r^2 \omega$$

Comme $\omega = d\theta/dt$, on a finalement :

$$l_0 = l = \gamma m r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

D. Démonstration : quand la vitesse de la particule tend vers celle de la lumière, la distance de moindre approche tend vers le paramètre d'impact

À démontrer :

$$\lim_{v_1 \rightarrow c} r_1 = d$$

Démonstration :

Commençons par appliquer la conservation du moment cinétique de la particule.

En notant $\vec{l}_0 \equiv \vec{l}(\vec{r} \rightarrow \infty)$ et $\vec{l}_1 \equiv \vec{l}(\vec{r} = \vec{r}_1)$, la conservation du moment cinétique permet d'écrire :

$$\vec{l}_0 = \vec{l}_1$$

D'où :

$$\|\vec{l}_0\| = \|\vec{l}_1\|$$

Pour la norme $l_0 \equiv \|\vec{l}_0\|$ du moment cinétique, rappelons la définition relativiste de ce vecteur, donnée en (4) : $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\gamma m \vec{v})$. La norme l du vecteur moment cinétique est donc donnée par $l = \gamma m r v \sin \varphi$, où φ est l'angle entre les vecteurs \vec{r} et \vec{v} (ou \vec{p}).

Quand la particule est très loin de la masse M , c'est à dire pour $r \rightarrow \infty$, on note $\gamma = \gamma_0$, $r = r_0$, $v = v_0$ et $\varphi = \varphi_0$. On a alors

$$l_0 = \gamma_0 m r_0 v_0 \sin \varphi_0 = \gamma_0 m v_0 r_0 \sin \varphi_0$$

En définissant $\varphi_0' = \pi - \varphi_0$ et en utilisant l'identité trigonométrique $\sin(\pi - x) = \sin(x)$, on a :

$$\begin{aligned} l_0 &= \gamma_0 m v_0 r_0 \sin \varphi_0 \\ &= \gamma_0 m v_0 r_0 \sin(\pi - \varphi_0) \\ &= \gamma_0 m v_0 r_0 \sin \varphi_0' \end{aligned}$$

Puisque le vecteur vitesse initiale \vec{v}_0 de la particule est parallèle à l'asymptote de la trajectoire, il en découle que $r_0 \sin \varphi'_0 = d$, où d est le paramètre d'impact (cf. fig. 18). On obtient alors :

$$l_0 = \gamma_0 m v_0 d$$

En \vec{r}_1 , la norme l_1 du moment cinétique est donnée par (85) :

$$l_1 = m r_1 \gamma_1 v_1$$

La conservation du moment cinétique permet alors d'égaliser l_0 et l_1 :

$$\begin{aligned} l_0 &= l_1 \\ \gamma_0 m v_0 d &= m r_1 \gamma_1 v_1 \\ \gamma_0 v_0 d &= r_1 \gamma_1 v_1 \\ \gamma_0 \beta_0 c d &= r_1 \gamma_1 \beta_1 c \\ \gamma_0 \beta_0 d &= r_1 \gamma_1 \beta_1 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé $v = \beta c$ pour la dernière égalité. En explicitant ci-dessus le facteur $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_0}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} d &= \frac{\beta_1}{\sqrt{1 - \beta_1^2}} r_1 \\ \frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} d^2 &= \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1^2} r_1^2 \\ \frac{\beta_0^2}{1 - \beta_0^2} &= \frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1^2} \frac{r_1^2}{d^2} \\ \frac{1 - \beta_0^2}{\beta_0^2} &= \frac{1 - \beta_1^2}{\beta_1^2} \frac{d^2}{r_1^2} \\ \frac{1}{\beta_0^2} - 1 &= \frac{1 - \beta_1^2}{\beta_1^2} \frac{d^2}{r_1^2} \\ \frac{1}{\beta_0^2} &= \frac{1 - \beta_1^2}{\beta_1^2} \frac{d^2}{r_1^2} + 1 = \frac{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2}{\beta_1^2 r_1^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\beta_0^2 = \frac{\beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2}} \quad (D1)$$

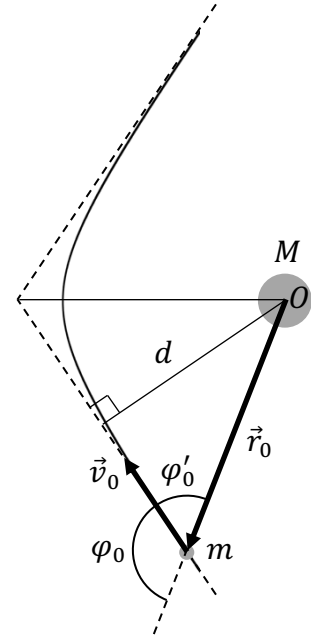


Fig. 18 Relation entre moment cinétique l_0 , vitesse initiale v_0 et paramètre d'impact d .

Appliquons maintenant la conservation de l'énergie de la particule.
L'expression de l'énergie est donnée par (83) :

$$E = (\gamma - 1)mc^2 - \frac{GMm}{r}$$

En notant $E_0 \equiv E(r \rightarrow \infty)$, $E_1 \equiv E(r = r_1)$, la conservation de l'énergie permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E_0 &= E_1 \\ (\gamma_0 - 1)mc^2 - 0 &= (\gamma_1 - 1)mc^2 - \frac{GMm}{r_1} \\ (\gamma_0 - 1)c^2 &= (\gamma_1 - 1)c^2 - \frac{GM}{r_1} \\ \gamma_0 - 1 &= \gamma_1 - 1 - \frac{GM}{c^2 r_1} \\ \gamma_0 &= \gamma_1 - \frac{GM}{c^2 r_1} \end{aligned}$$

En explicitant ci-dessus le facteur $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - \beta_0^2}$, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \gamma_1 - \frac{GM}{c^2 r_1}} \quad (D2)$$

Il s'agit maintenant de combiner (D1) et (D2) pour obtenir la relation entre r_1 , d et v_1 (ou γ_1).

De (D1), on déduit :

$$\begin{aligned} 1 - \beta_0^2 &= 1 - \frac{\beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2} \\ &= \frac{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2 - \beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2} \\ &= \frac{(1 - \beta_1^2)d^2}{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} = \sqrt{\frac{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2}}$$

On substitue maintenant cette expression dans (D2) :

$$\sqrt{\frac{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2}} = \gamma_1 - \frac{GM}{c^2 r_1}$$

$$r_1 \sqrt{\frac{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2}} = \gamma_1 r_1 - \frac{GM}{c^2}$$

$$r_1^2 \frac{(1 - \beta_1^2)d^2 + \beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2} = \gamma_1^2 r_1^2 - 2\gamma_1 r_1 \frac{GM}{c^2} + \frac{(GM)^2}{c^4}$$

$$r_1^2 \left(1 + \frac{\beta_1^2 r_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2}\right) = \gamma_1^2 r_1^2 - 2\gamma_1 \frac{GM}{c^2} r_1 + \frac{(GM)^2}{c^4}$$

$$r_1^2 \left(1 - \gamma_1^2 + \frac{\beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2} r_1^2\right) + 2\gamma_1 \frac{GM}{c^2} r_1 - \frac{(GM)^2}{c^4} = 0$$

$$\frac{\beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)d^2} r_1^4 + (1 - \gamma_1^2)r_1^2 + 2\gamma_1 \frac{GM}{c^2} r_1 - \frac{(GM)^2}{c^4} = 0$$

Exprimons cette dernière équation en fonction du seul paramètre γ_1 . Comme $\gamma_1 = 1/\sqrt{1 - \beta_1^2}$, alors $\beta_1^2 = 1 - 1/\gamma_1^2$. En substituant cette expression dans l'équation ci-dessus, on a :

$$\boxed{\frac{\gamma_1^2 - 1}{d^2} r_1^4 - (\gamma_1^2 - 1)r_1^2 + 2\gamma_1 \frac{GM}{c^2} r_1 - \frac{(GM)^2}{c^4} = 0} \quad (D3)$$

(D3) est une équation de degré 4 en r_1 . Comme on s'intéresse à la relation entre r_1 et d pour $v_1 \rightarrow c$, c'est à dire pour $\gamma_1 \rightarrow \infty$, mettons γ_1^2 en évidence pour chaque terme de (D3) :

$$\gamma_1^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2}\right) \frac{r_1^4}{d^2} - \gamma_1^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2}\right) r_1^2 + \gamma_1^2 \frac{1}{\gamma_1} \frac{2GM}{c^2} r_1 - \gamma_1^2 \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{(GM)^2}{c^4} = 0$$

$$\gamma_1^2 \left[\left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2}\right) \frac{r_1^4}{d^2} - \left(1 - \frac{1}{\gamma_1^2}\right) r_1^2 + \frac{1}{\gamma_1} \frac{2GM}{c^2} r_1 - \frac{1}{\gamma_1^2} \frac{(GM)^2}{c^4} \right] = 0$$

Pour $v_1 \rightarrow c$, $\gamma_1 \rightarrow \infty$ et les termes $1/\gamma_1$ et $1/\gamma_1^2$ tendent vers 0 dans l'équation ci-dessus, ce qui donne :

$$\underbrace{\gamma_1^2}_{\neq 0} \left(\frac{r_1^4}{d^2} - r_1^2 \right) = 0$$

D'où :

$$\frac{r_1^4}{d^2} - r_1^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$r_1^2 \left(\frac{r_1^2}{d^2} - 1 \right) = 0$$

$$\frac{r_1^2}{d^2} - 1 = 0$$

$$r_1^2 = d^2$$

$$r_1 = d$$

On a ainsi montré que :

$$\lim_{v_1 \rightarrow c} r_1 = d$$

E. Déduction de l'angle de déflexion à partir des plaques photographiques

C'est à partir de plaques photographiques telles que celle apparaissant sur la figure 14, qu'Arthur Eddington et Frank Dyson obtinrent en 1919 l'angle de déflexion de rayons lumineux issus d'étoiles lointaines, lors d'une éclipse solaire. Nous n'avons pas connaissance des calculs effectués par les deux scientifiques pour obtenir cet angle à l'aide des clichés, mais nous présentons ici une méthode pour y parvenir.

▪ Rappel d'optique géométrique

(i) Lorsqu'un faisceau de rayons lumineux parallèles atteint une lentille convergente, celle-ci fait converger le faisceau en un point situé sur son plan focal (cf. fig. 19).

(ii) Une lentille convergente ne dévie pas les rayons lumineux passant par son centre (cf. fig. 19). Un tel rayon lumineux est appelé **axe secondaire** lorsqu'il est parallèle à un faisceau de rayons parallèles entre eux. Ainsi, à tout faisceau de rayons parallèles entre eux correspond un axe secondaire.

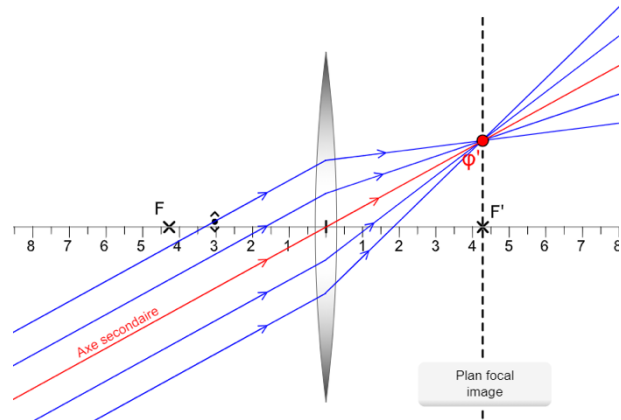
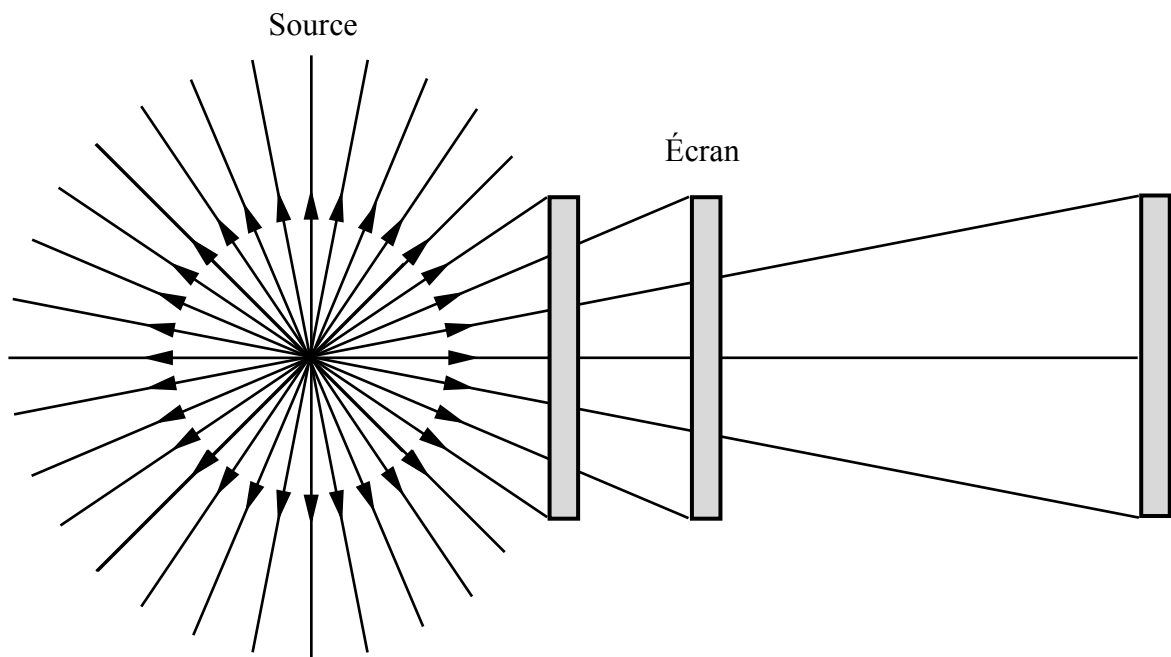
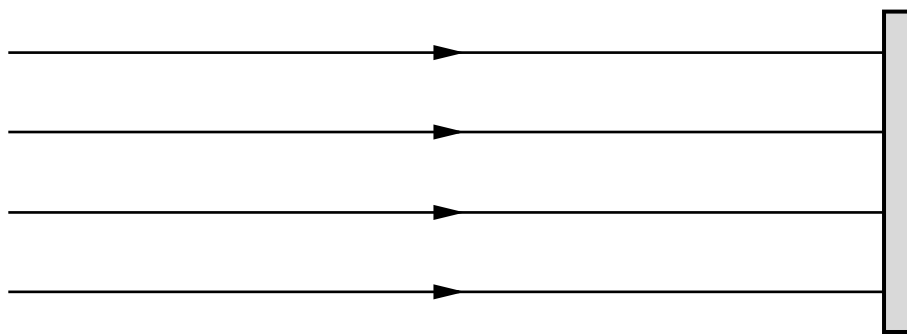


Fig. 19 Plan focal d'une lentille convergente.

(iii) Lorsque des rayons lumineux issus d'une source ponctuelle (ou d'un point d'une source lumineuse) interceptent une surface de dimensions finies, l'angle entre les rayons interceptant cette surface est d'autant plus faible que celle-ci est éloignée de la source. Par conséquent, lorsqu'une surface reçoit des rayons lumineux issus d'une source située à une distance très supérieure à celles de ses dimensions, ceux-ci sont presque parallèles entre eux (cf. fig. 20).



a) Source à une distance finie de l'écran.



b) Source à une distance infinie de l'écran.

Fig. 20 Angle entre des rayons lumineux issus d'une source ponctuelle et aboutissant sur une surface de dimensions finies.

- Calcul de l'angle de déflexion à partir de mesures effectuées sur les plaques photographiques

Une photographie est l'enregistrement d'une image *réelle* par un procédé technique, quel qu'il soit. Or, seule une lentille convergente, ou une association de lentille dont la distance focale globale équivaut à celle d'une lentille convergente, peut former des images réelles.

Principe de fonctionnement d'une lunette astronomique

Un télescope est prévu pour former une image réelle d'objets très éloignés²⁰, comme des planètes ou des étoiles. En général, cet instrument est constitué de l'association de plusieurs lentilles et miroirs. On appelle **lunette astronomique** un télescope constitué uniquement de lentilles. Nous en rappelons ici la constitution et le principe de fonctionnement.

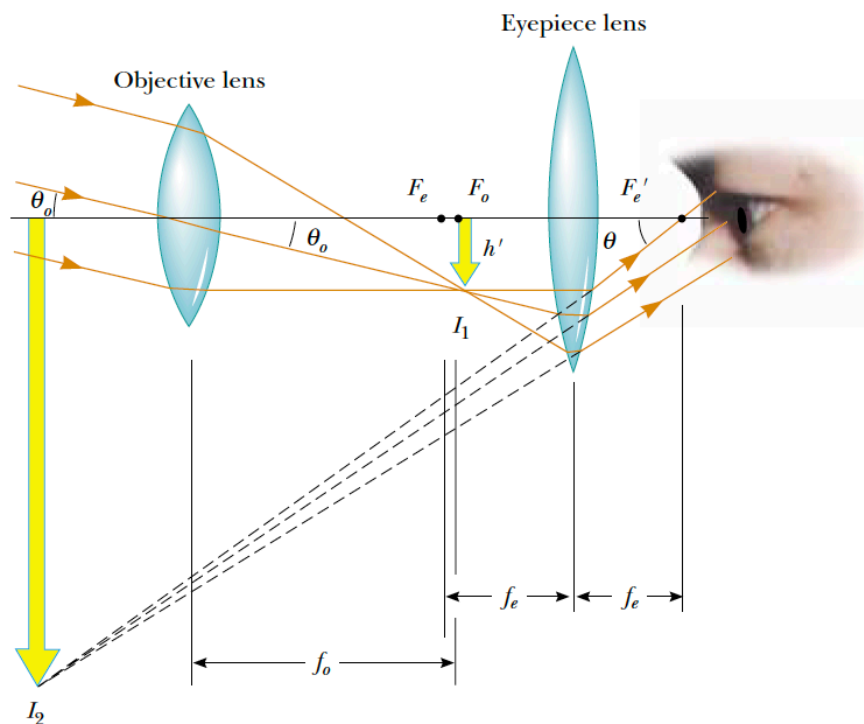


Fig. 21 La lunette astronomique.

Une lunette astronomique est constituée de deux lentilles convergentes, appelées respectivement **objectif** et **oculaire** (Objective lens et Eyepiece sur la fig. 21 ci-dessus). On les dispose de sorte que leurs axes optiques respectifs soient confondus.

Les rayons lumineux provenant d'objets très lointains et atteignant l'objectif sont parallèles entre eux (cf. fig. 20 b)). Celui-ci forme alors *sur son plan focal* une image réelle, réduite et renversée de l'objet (image I_1 de hauteur h' sur la fig. 21). L'objectif et l'oculaire sont disposés de sorte que le plan focal de l'objectif soit situé entre l'oculaire et le plan focal de ce dernier. Ainsi, l'image réelle I_1 formée par l'objectif constitue un objet - secondaire - pour l'oculaire. Comme cet objet secondaire est situé entre l'oculaire et son plan focal, l'oculaire en forme une image virtuelle, agrandie et renversée (par rapport à l'objet réel), visible

²⁰ Des objets sont considérés comme étant « très éloignés » s'ils sont situés à une distance très supérieure à la distance focale de l'objectif.

par un observateur situé derrière l'oculaire (image I_2 sur la fig. 21). L'oculaire joue donc le rôle d'une loupe agrandissant l'image formée par l'objectif.

En disposant l'objectif et l'oculaire de sorte que leurs plans focaux respectifs soient *confondus* (ce qui n'est pas le cas sur la fig. 21), on obtient ainsi un *grandissement maximal* pour l'image formée par l'oculaire. Les rayons émergeant de l'oculaire sont dans ce cas *parallèles* entre eux, ce qui permet à l'observateur de voir cette image nette sans effort d'accommodation. De plus, l'image ainsi obtenue est *réelle*, ce qui permet de la projeter sur un écran ou une plaque photographique à l'aide d'une troisième lentille convergente placée derrière l'oculaire. Celle-ci fera ainsi converger sur son plan focal les rayons parallèles issus de l'oculaire. En plaçant une plaque photographique (ou un capteur photographique ccd) sur le plan focal de cette troisième lentille, on peut enregistrer cette image réelle sur une photographie.

On définit le **grossissement angulaire**, noté G_A , de la lunette astronomique comme le rapport entre l'angle θ et l'angle θ_0 (cf. fig. 21) :

$$G_A = \frac{\theta}{\theta_0}$$

θ : angle sous tendu par l'image de l'objet lorsqu'elle est vue à travers l'oculaire par l'observateur

θ_0 : angle sous tendu par l'objet lorsque ce dernier est vu directement par l'observateur

On peut montrer que le rapport θ/θ_0 est égal au rapport $f_{\text{objectif}}/f_{\text{oculaire}}$ des distance focales de l'objectif et de l'oculaire (des lentilles L_1 et L_2), ainsi :

$$G_A = -\frac{f_{\text{objectif}}}{f_{\text{oculaire}}} = -\frac{f_1}{f_2}$$

où le signe négatif ci-dessus a été ajouté pour tenir compte du fait que l'image de l'objet est renversée (par rapport à l'objet réel), conformément aux conventions de signe concernant les paramètres optiques.

Détermination expérimentale de l'angle de déflexion

Considérons une lunette astronomique équipée d'une troisième lentille convergente placée derrière l'oculaire et permettant d'enregistrer l'image sur une plaque photographique.

Nous notons f_1 la distance focale de l'objectif, f_2 la distance focale de l'oculaire, et f_3 la distance focale de la troisième lentille placée derrière l'oculaire.

Nous notons O_1 , O_2 et O_3 les centres respectifs des trois lentilles convergentes, lesquelles sont notées respectivement L_1 , L_2 et L_3 . Nous notons encore C' le point d'intersection entre l'axe optique commun aux trois lentilles et la plaque photographique²¹ (cf. fig. 22).

²¹ L'axe optique commun aux trois lentilles est évidemment normal au plan de la plaque photographique.

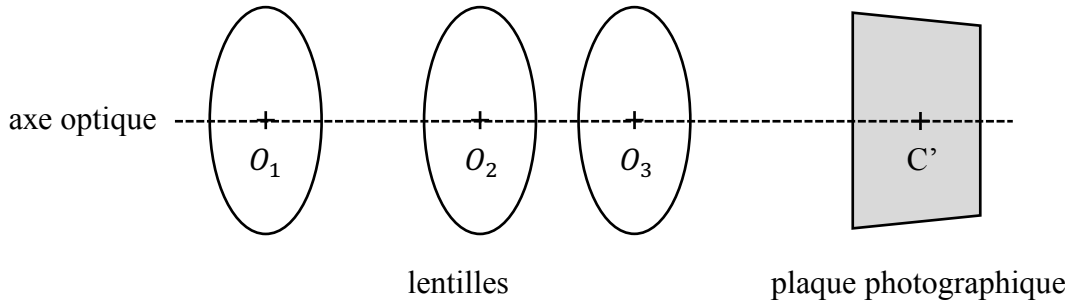


Fig. 22 Lentilles et plaque photographique.

Considérons une étoile photographiée en présence du Soleil (éclipsé par la Lune). On note B' la position de son image sur la photographie. Considérons cette même étoile photographiée en l'absence du Soleil (des mois après l'éclipse). On note A' la position de son image sur la photographie. Du fait de la déviation des rayons lumineux issus de l'étoile lors de l'éclipse, les points A' et B' sur la photographie ont des positions différentes (cf. fig. 23). Précisons que pour ces deux photographies prises à plusieurs mois d'intervalle, le télescope braquait le ciel dans la même direction relativement au référentiel terrestre²².

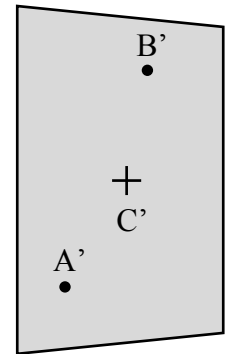


Fig. 23 Images B' et A' d'une étoile, enregistrées respectivement en présence du Soleil (éclipsé) et en l'absence de ce dernier.

Pour déterminer l'angle de déflexion des rayons lumineux à partir de mesures effectuées sur la plaque photographique, la figure 24 ci-dessous représente les trajets des rayons lumineux issus d'une étoile lointaine et aboutissant sur la plaque photographique.

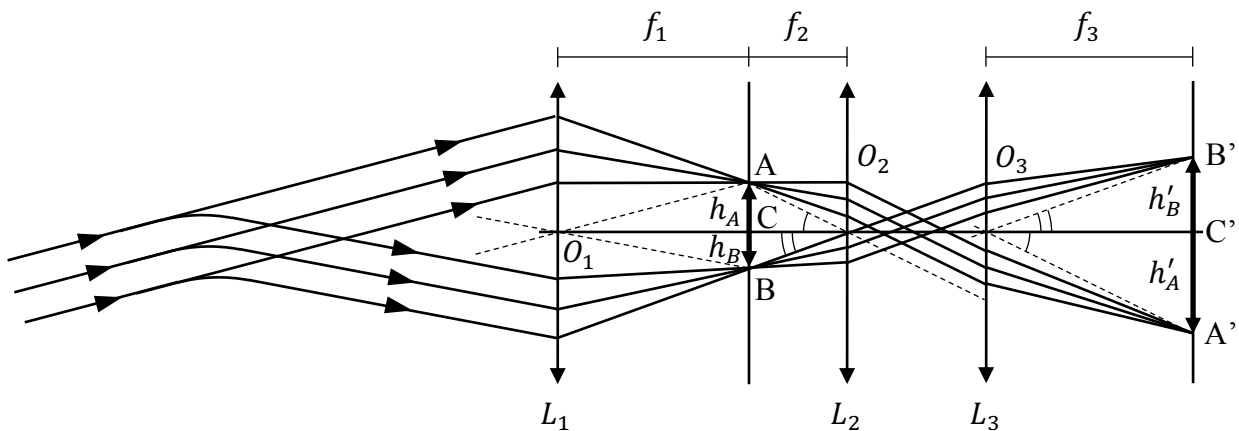


Fig. 24 Trajet des rayons lumineux issus d'une étoile lointaine et aboutissant sur la plaque photographique. Les droites en pointillés sont les axes secondaires associés aux faisceaux parallèles correspondants.

²² Cette direction est déterminée par deux angles : l'angle azimutal et l'angle orbital.

Sur la figure 24, en l'absence du Soleil, un faisceau de rayons parallèles issus d'une étoile lointaine atteint la lentille L_1 , laquelle le fait converger en un point A situé sur son plan focal (ce dernier étant confondu avec celui de la lentille L_2). Les rayons de ce faisceau divergent ensuite et atteignent la lentille L_2 de laquelle ils émergent parallèlement. Ces rayons parallèles atteignent plus loin la lentille L_3 qui les fait converger en un point A' situé sur son plan focal, formant ainsi une image réelle de l'étoile en A' sur la plaque photographique.

En présence du Soleil, les rayons parallèles issus de l'étoile lointaine sont déviés à proximité de celui-ci et atteignent l'objectif de la lunette astronomique en un faisceau parallèle²³. La description du trajet de ce faisceau jusqu'à la plaque photographique est la même que celle détaillée précédemment, avec des convergences du faisceau aux points B et B' sur les plans focaux des lentilles L_1 respectivement L_3 , formant ainsi une deuxième image réelle de l'étoile en B' sur la plaque photographique.

Comme illustré sur la fig. 19, c'est dans le plan déterminé par l'axe optique de la lentille et l'axe secondaire d'un faisceau de rayons parallèles que l'on doit représenter le trajet de ce dernier pour visualiser son point de convergence sur le plan focal de la lentille. Comme les deux faisceaux issus de l'étoile lointaine (en présence et en l'absence du Soleil) ont des axes secondaires de directions différentes dans l'espace, les plans permettant de représenter leurs trajets respectifs dans la lunette astronomique jusqu'à leur point de convergence sur la plaque photographique sont, en général, orientés différemment dans l'espace mais contiennent tous deux l'axe optique commun aux lentilles L_1 , L_2 et L_3 . Pour cette raison, on peut représenter ces deux plans dans celui de la page, comme illustré sur la figure 24. Cependant, sur cette figure, l'angle de déflexion α entre les deux faisceaux n'apparaît pas, car celui-ci se mesure dans le plan formé par les axes secondaires respectifs de ces derniers. Ainsi, pour obtenir α , nous devons baser nos calculs sur des considérations géométriques dans l'espace à trois dimensions.

Les axes secondaires respectifs des deux faisceaux issus de l'étoile lointaine étant des droites concourantes s'intersectant au centre O_1 de la lentille L_1 (l'objectif), tous deux forment le plan dans lequel apparaît l'angle α qu'ils définissent. De plus, les axes secondaires ainsi que l'axe optique de la lentille L_1 interceptent le plan focal de cette dernière aux points A, B et C respectivement (cf. fig. 25).

Les points O_1 , A, B et C sont les sommets d'un tétraèdre dont l'arête O_1C est normale au plan focal de la lentille L_1 , lequel contient le triangle ABC. L'angle AO_1B est l'angle α qui nous intéresse. Pour l'obtenir, l'idée est d'appliquer le théorème du cosinus au triangle AO_1B . Pour ce faire, on doit connaître les trois côtés de ce triangle, c'est-à-dire les exprimer en fonction de grandeurs connues ou mesurables dans ce dispositif optique, à savoir les distances focales des lentilles et des mesures effectuées sur la plaque photographique.

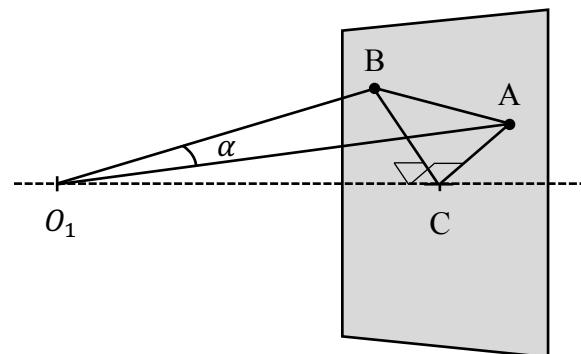


Fig. 25 Le tétraèdre O_1ABC et l'angle α .

²³ Étant très éloignée du corps massif (le Soleil), la source (une étoile lointaine) est quasiment ponctuelle et les rayons parallèles qui en sont issus sont, par conséquent, très proches les uns des autres ; leurs paramètres d'impact respectifs sont donc presque égaux. Pour cette raison, ces rayons sont déviés d'un même angle par le corps massif et restent alors parallèles entre eux après déviation, comme indiqué sur la fig. 24.

Les triangles CO_1A et CO_1B sont tous deux rectangles en C , on peut donc leur appliquer le théorème de Pythagore. En remarquant que $O_1C = f_1$ et en adoptant la notation suivante (cf. fig. 25) : $h_A \equiv \overline{CA}$, $h_B \equiv \overline{CB}$, $h_D \equiv \overline{AB}$, on obtient :

$$\overline{O_1A} = \sqrt{f_1^2 + h_A^2} \quad (E1)$$

$$\overline{O_1B} = \sqrt{f_1^2 + h_B^2}$$

Le théorème du cosinus appliqué au triangle AO_1B donne :

$$h_D^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{O_1B}^2 - 2(\overline{O_1A})(\overline{O_1B}) \cos \alpha \quad (E2)$$

En y substituant (E1), on a :

$$h_D^2 = f_1^2 + h_A^2 + f_1^2 + h_B^2 - 2\sqrt{(f_1^2 + h_A^2)(f_1^2 + h_B^2)} \cos \alpha \quad (E3)$$

D'où :

$$\cos \alpha = \frac{2f_1^2 + h_A^2 + h_B^2 - h_D^2}{2\sqrt{(f_1^2 + h_A^2)(f_1^2 + h_B^2)}} \quad (E4)$$

Il nous reste à exprimer les longueurs h_A , h_B et h_D apparaissant dans (E4) en fonction de longueurs mesurables sur la plaque photographique située sur le plan focal de la lentille L_3 . On peut le faire en remarquant que les triangles O_2CA et $O_3C'A'$ sont semblables et qu'il en est de même pour les triangles O_2CB et $O_3C'B'$ (cf. fig. 24). Ces deux paires de triangles semblables nous permettent d'écrire les deux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{h_A}{h'_A} &= \frac{f_2}{f_3} \\ \frac{h_B}{h'_B} &= \frac{f_2}{f_3} \end{aligned} \quad (E5)$$

Nous voyons en (E5) que les deux paires de côtés h_A et h'_A respectivement h_B et h'_B obéissent à la même relation de proportionnalité. Il en est donc de même pour la paire de côté h_D et h'_D :

$$\frac{h_D}{h'_D} = \frac{h_A}{h'_A} = \frac{h_B}{h'_B} = \frac{f_2}{f_3} \quad (E6)$$

Des équations (E5) et (E6), on a :

$$\begin{aligned}
h_A &= \frac{f_2}{f_3} h'_A \\
h_B &= \frac{f_2}{f_3} h'_B \\
h_D &= \frac{f_2}{f_3} h'_D
\end{aligned}
\tag{E7}$$

En substituant (E7) dans (E4), on obtient :

$$\cos \alpha = \frac{2f_1^2 + \left(\frac{f_2}{f_3}\right)^2 (h_A'^2 + h_B'^2 - h_D'^2)}{2 \sqrt{\left(f_1^2 + \left(\frac{f_2}{f_3} h_A'\right)^2\right) \left(f_1^2 + \left(\frac{f_2}{f_3} h_B'\right)^2\right)}}
\tag{E8}$$

Que l'on peut finalement écrire :

$$\cos \alpha = \frac{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{f_2}{f_1 f_3}\right)^2 (h_A'^2 + h_B'^2 - h_D'^2)}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{f_2}{f_1 f_3} h_A'\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{f_2}{f_1 f_3} h_B'\right)^2\right)}}
\tag{E9}$$

Il apparaît ci-dessus le rapport f_2/f_1 qui peut être exprimé en termes du grossissement angulaire G_A de la lunette astronomique, une caractéristique essentielle de cet instrument (cf. la section *Principe de fonctionnement d'une lunette astronomique*) : $f_2/f_1 = -1/G_A$. En termes de ce paramètre optique, la solution (E9) devient :

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{1 + \frac{1}{2(G_A f_3)^2} (h_A'^2 + h_B'^2 - h_D'^2)}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{1}{G_A f_3} h_A'\right)^2\right) \left(1 + \left(\frac{1}{G_A f_3} h_B'\right)^2\right)}}}
\tag{E10}$$

L'équation (E10) est la relation recherchée. Elle permet en effet de calculer l'angle de déflexion α des rayons lumineux issus d'une étoile lointaine et passant à proximité d'un corps massif (le Soleil), à partir des mesures, *sur la plaque photographique*, des longueurs h'_A , h'_B , h'_D et des caractéristiques optiques de la lunette astronomique, à savoir :

- son grossissement angulaire G_A
- la distance focale f_3 de la lentille L_3 placée derrière son oculaire.

Rappelons les définitions des longueurs h'_A , h'_B , h'_D : $h'_A \equiv \overline{C'A'}$, $h'_B \equiv \overline{C'B'}$ et $h'_D \equiv \overline{A'B'}$. h'_A , h'_B et h'_D sont donc les longueurs des côtés du triangle $A'B'C'$ situé sur la plaque photographique. Usuellement, le point C' est situé au centre de la plaque photographique rectangulaire (cf. fig. 22 et fig. 26).

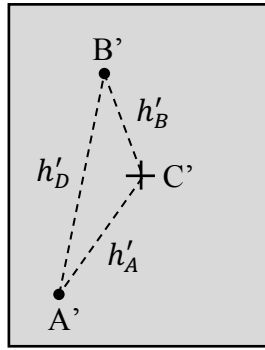


Fig. 26 h'_A , h'_B et h'_D sont les longueurs à mesurer sur la plaque photographique.

17. Références

- *Relativité*, Bertrand Berche, Université Henri Poincaré, Nancy 1
- *Physique théorique, tome II – Théorie du champ*, L. Landau et E. Lifchitz
- *Relativité générale*, Thomas A. Moore
- *Einstein – Le père du temps moderne*, Pour la science, Les génies de la science
- *Einstein – De la relativité générale à la physique du XXI^e siècle*, La Recherche, hors-série
- Pierre Léna, « Éclipse solaire du 29 mai 1919 », *Encyclopædia Universalis* [en ligne], consulté le 17 mars 2021. URL : <http://www.universalis-edu.com/encyclopedie/eclipse-solaire-du-29-mai-1919/>