

SYMÉTRIES DE L'ESPACE ET DU TEMPS ET LOIS DE CONSERVATION

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i$$

Pascal Rebetez
Août 2013

RÉSUMÉ

Après une introduction concernant les symétries et les lois de conservation, nous rappelons les concepts de base et les postulats de la mécanique classique et démontrons les conséquences de ces derniers sur les propriétés de symétrie de l'espace et du temps. Nous précisons ensuite le statut de l'énergie potentielle et certaines de ses propriétés. Nous démontrons finalement que, de l'homogénéité, de l'isotropie et de l'uniformité de l'espace et du temps, découlent les lois de conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Préambule</i>	4
<i>Introduction</i>	4
Les lois de conservation	4
La symétrie en physique	4
Symétries et lois de conservation (par Gilles Cohen-Tannoudji).....	5
<i>Concepts et définitions en mécanique classique</i>	5
La quantité de mouvement.....	5
La force.....	5
Le travail et l'énergie	6
Travail d'une force	6
Énergie cinétique	7
Force conservative et énergie potentielle d'une particule	7
Les deux expressions d'une force conservative	9
Énergie potentielle d'un système de particules	9
Énergie mécanique d'un système de particules.....	10
<i>Les postulats de la mécanique classique</i>	10
Le temps absolu.....	10
Le principe d'inertie	11
Le principe de relativité galiléenne	11
<i>Homogénéité, isotropie et uniformité de l'espace et du temps</i>	11
Homogénéité et isotropie de l'espace	11
Uniformité du temps.....	13
<i>Statut et propriétés de l'énergie potentielle</i>	13
Statut de l'énergie potentielle.....	14
L'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps.....	14
L'énergie potentielle ne dépend que des distances relatives entre particules	14
<i>Uniformité du temps et conservation de l'énergie</i>	15
<i>Homogénéité de l'espace et conservation de la quantité de mouvement</i>	16
<i>Isotropie de l'espace et conservation du moment cinétique</i>	17
<i>Conclusion</i>	19
<i>Références</i>	19
<i>Remerciements</i>	19
<i>Annexe 1 Le gradient d'une fonction scalaire</i>	20
<i>Annexe 2 Propriétés du produit mixte</i>	21

Préambule

La notion de symétrie et son exploitation en physique est habituellement introduite dans le cadre de la formulation lagrangienne de la mécanique classique. Cette formulation se base sur le théorème de Noether et nécessite l'usage du calcul variationnel. Cette approche est traditionnellement abordée au niveau universitaire. Cet article a pour but d'exploiter le concept de symétrie et d'en illustrer la très grande fécondité en montrant que les trois lois de conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique, sont une conséquence des propriétés de symétrie de l'espace et du temps. Plus précisément, nous démontrons que les trois profondes implications

- uniformité du temps \Rightarrow conservation de l'énergie
- homogénéité de l'espace \Rightarrow conservation de la quantité de mouvement
- isotropie de l'espace \Rightarrow conservation du moment cinétique

peuvent s'obtenir sans faire usage du formalisme lagrangien et du théorème de Noether. En effet, nous n'aurons recours qu'aux notions de quantité de mouvement et d'énergie potentielle, définies à partir des entités fondamentales que sont l'espace et le temps.

Introduction

Les lois de conservation

La solution exacte des équations du mouvement (découlant des lois du mouvement de Newton) d'un système mécanique est en général impossible à obtenir. En fait, seuls quelques systèmes relativement simples admettent une solution analytique complète qui permet d'exprimer la position des particules explicitement en fonction du temps écoulé. Par contre, même pour des systèmes très complexes, il existe des lois, dites de *conservation*, qui stipulent que certaines quantités telles l'énergie, la quantité de mouvement et le moment cinétique, demeurent *constantes au cours du temps*. Ces lois de conservation nous permettent de caractériser partiellement le mouvement du système, même si celui-ci ne peut être déterminé de manière complète. Bien que ces lois de conservation découlent des lois du mouvement de Newton et qu'elles n'apportent par conséquent aucune information supplémentaire, elles ont un domaine d'application plus vaste. En effet, les lois du mouvement de Newton ne sont ni valables à l'échelle microscopique des atomes (domaine régi par les lois de la mécanique quantique), ni pour des vitesses proches de c (domaine régi par les lois de la mécanique relativiste). En revanche, *les lois de conservation de la quantité de mouvement, de l'énergie, du moment cinétique, de la charge électrique et d'autres encore, se vérifient dans toutes les situations expérimentales observées jusqu'ici*. C'est pourquoi les lois de conservation sont plus fondamentales que les lois de Newton.

La symétrie en physique

"Une chose est symétrique si on peut la soumettre à une certaine opération et qu'elle apparaisse exactement la même après l'opération". C'est la définition de la notion de symétrie adoptée par R. Feynman (R. Feynman, le cours de physique de Feynman – mécanique 1).

Plus précisément, une symétrie en physique est une transformation des variables du système – qui peuvent être des variables géométriques ou des variables plus abstraites – qui ne change pas la formulation des lois physiques.

Symétries et lois de conservation (par Gilles Cohen-Tannoudji)

"La prise en compte des propriétés de symétrie est un fil conducteur qui parcourt toute l'histoire de la physique moderne, de Galilée et Newton à l'unification des interactions fondamentales à l'aide du modèle standard de la physique des particules. ... La formulation lagrangienne de la mécanique rationnelle classique met en lumière le rôle fondamental des propriétés de symétrie. Le théorème de Noether stipule qu'à toute symétrie correspond la conservation d'une quantité physique. ... Les propriétés d'invariance par des transformations de symétrie sont liées à des propriétés de relativité. Nous entendons par là l'impossibilité d'effectuer des mesures absolues, c'est-à-dire l'inobservabilité de certaines entités absolues. ... Ainsi, le théorème de Noether articule inobservabilité, symétrie et loi de conservation, comme l'indique le tableau ci-dessous dans les cas particuliers d'inobservables correspondant au temps, à la position et à la direction dans l'espace.

Inobservable	Symétrie	Loi de conservation
Origine du temps	Translation dans le temps	Énergie
Origine de l'espace	Translation dans l'espace	Quantité de mouvement
Direction privilégiée	Rotation	Moment cinétique

Nous voyons ainsi que la loi si fondamentale de conservation de l'énergie est équivalente à l'invariance par translation dans le temps, c'est-à-dire l'absence d'origine du temps." (Gilles Cohen-Tannoudji, <http://www.gicotan.fr/>).

On dit alors que le temps est *uniforme*. De même, l'espace est *homogène et isotrope*.

Concepts et définitions en mécanique classique

La quantité de mouvement

À partir du Moye Âge, on a réalisé que la vitesse ne suffisait pas à expliquer à elle seule toutes les caractéristiques du mouvement. Vers 1330, un Parisien, Jean Buridan eut l'intuition que la grandeur cruciale à prendre en compte pour décrire le mouvement d'un objet était le produit de sa masse par sa vitesse. Quand Newton a formulé ses lois du mouvement, la notion première qu'il utilisait était la *quantité de mouvement* (*momentum* en anglais), *produit de la masse d'un objet par sa vitesse* :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (1)$$

La force

Au début des *Principia*, Newton définit la force comme "une action exercée sur un corps pour changer son état, soit de repos, soit de mouvement uniforme ...". Selon lui, la force est *ce qui modifie le mouvement*. La manière dont s'effectue cette modification du mouvement est décrite par la deuxième loi de Newton qui s'exprime en termes de force, de masse et de quantité de mouvement : *la force exercée sur un corps est égale à la variation de sa quantité de mouvement par unité de temps* :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2)$$

La deuxième loi de Newton (2) ne peut cependant pas être considérée comme une loi de la nature. En effet, comme le précise R. Feynman : "Le contenu réel des lois de Newton est ceci : elles supposent qu'une force possède certaines *propriétés indépendantes*, en plus de la loi $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; mais les propriétés *spécifiques* indépendantes que possède la force ne furent complètement décrites ni par Newton ni par quelqu'un d'autre et de ce fait, la loi physique $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ est une loi incomplète." (R. Feynman, le cours de physique de Feynman – mécanique 1). Ainsi, pour disposer d'une théorie complète du mouvement, il faut aussi connaître la *loi de la force*, qui permet de calculer la force agissant sur un corps en fonction des propriétés du corps et de son environnement. La loi de la gravitation universelle découverte par Newton est un exemple d'une telle loi. La loi de la force *et* la deuxième loi de Newton permettent alors *conjointement* de connaître l'évolution du mouvement d'un corps au cours du temps, en fonction des propriétés du corps et de son environnement. En ce sens, à elle seule, *la deuxième loi de Newton est à considérer comme une définition de la force*.

Le travail et l'énergie

L'énergie est définie à partir de la notion de *travail*, lequel est défini à partir de la notion de force. L'énergie se manifeste sous deux formes fondamentales ; *l'énergie cinétique*, associée au mouvement des particules et *l'énergie potentielle*, associée aux interactions entre particules. Le schéma suivant illustre l'enchaînement des différentes définitions qui conduisent des notions fondamentales d'espace, de temps et de masse à la notion d'énergie :

espace et temps \rightarrow vitesse }
 masse } \rightarrow quantité de mouvement \rightarrow force \rightarrow travail \rightarrow énergie

À partir de la notion de travail, on introduit la notion de force conservative. Finalement, l'énergie cinétique d'une particule s'obtient en calculant le travail de la force résultante qui s'exerce sur cette particule et l'énergie potentielle, en calculant le travail d'une force conservative qui s'exerce sur cette particule :

$$\begin{aligned} \text{énergie cinétique} &= \text{travail de la force résultante} \\ \text{énergie potentielle} &= \text{travail d'une force conservative} \end{aligned}$$

Si les particules du système considéré interagissent par le biais de plusieurs forces conservatives, à chacune de ces forces correspond une énergie potentielle. C'est la somme des énergies cinétique et potentielles qui obéit à une loi de conservation. Cette somme est appelée *énergie mécanique* :

$$\text{énergie mécanique} = \text{énergie cinétique} + \text{somme des énergies potentielles}$$

Donnons maintenant l'expression mathématique de ces différentes grandeurs.

Travail d'une force

Soit une force \vec{F} agissant sur une particule. En général, cette force dépend de la position de la particule, cette position étant repérée par un vecteur \vec{r} relativement à un repère (O, x, y, z) . Nous noterons donc cette force $\vec{F}(\vec{r})$. Considérons deux points A et B de l'espace, repérés par les vecteurs \vec{r}_A , respectivement \vec{r}_B et un chemin \mathcal{C} menant de A à B . Le travail de la force \vec{F} sur le chemin \mathcal{C} entre les point A et B est noté W_{AB} et défini par :

$$W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (3)$$

où $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ est le produit scalaire entre le vecteur force $\vec{F}(\vec{r})$ et le vecteur déplacement infinitésimal $d\vec{r}$. Le travail d'une force est donc une grandeur scalaire.

Énergie cinétique

À partir des définitions qui précèdent, on peut définir et trouver l'expression de l'énergie cinétique d'une particule. On considère une particule de masse m soumise à une force \vec{F} supposée être la force résultante. Calculons le travail de cette force entre deux positions A et B de cette particule sur sa trajectoire, où ces deux positions sont repérées par les vecteurs \vec{r}_A , respectivement \vec{r}_B :

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = \int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} \frac{d\vec{p}}{dt} \vec{v} dt = \int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} d(m\vec{v}) \vec{v} \\ &= m \int_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} \vec{v} d\vec{v} = m \left[\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right]_{\vec{v}_A}^{\vec{v}_B} = m \left[\frac{1}{2} v^2 \right]_{v_A}^{v_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité ci-dessus s'obtient en se rappelant que $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \equiv v^2$. Ainsi :

$$W_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (4)$$

Le travail de la force résultante qui s'exerce sur une particule entre deux points A et B de sa trajectoire est égal à la variation de la quantité $\frac{1}{2} m v^2$ entre A et B . On appelle cette quantité *énergie cinétique de la particule* et on la note E_{cin} :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (5)$$

Le résultat (4) est appelé *théorème de l'énergie cinétique* et stipule que *le travail de la force résultante qui s'exerce sur une particule entre deux points de sa trajectoire est égal à la variation de son énergie cinétique entre ces deux points* :

$$W = \Delta E_{cin} \quad (6)$$

L'unité d'un travail et d'une énergie cinétique est : $[E_{cin}] = ML^2/T^2$ en $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ dans le système international d'unité, où $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ est appelé 1 Joule, de symbole J.

Force conservative et énergie potentielle d'une particule

On dit d'une force \vec{F} qu'elle est *conservative* si son travail entre deux points A et B est indépendant du chemin \mathcal{C} le long duquel il est calculé. Le travail d'une force conservative ne dépend donc que des points A et B entre lesquels il est calculé et l'on peut le noter :

$$\Delta U \equiv U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (7)$$

où le signe négatif dans (7) a été introduit par convention et $U(\vec{r})$ est une fonction scalaire définie en tout point de l'espace. Elle est appelée *énergie potentielle* (associée à la force conservative \vec{F}) de la particule sur laquelle s'exerce cette force et $\Delta U \equiv U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)$ est la *variation d'énergie potentielle* de la particule entre les points A et B . Le terme d'énergie que l'on attribue à la fonction $U(\vec{r})$ est justifié par le fait que son unité est la même que celle d'une énergie cinétique. De la définition ci-dessus, on peut établir une relation entre la force conservative et l'énergie potentielle qui lui est associée :

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \equiv -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \equiv -\nabla U \quad (8)$$

où \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} sont des vecteurs de base dans le repère (O, x, y, z) et les deux dernières égalités sont d'autres notations de la première. ∇ est appelé *gradient* d'une fonction scalaire et nous en donnons quelques précisions dans l'annexe 1.

Supposons que la particule que nous avons considérée ci-dessus appartienne à un système isolé de particules et que la force \vec{F} qu'elle subit soit la résultante de celles exercées par les autres particules du système. La force $\vec{F}(\vec{r})$ apparaissant dans l'intégrale (7) est alors une force *interne* à ce système. Considérons maintenant une force *externe* au système (i.e. exercée par un agent qui ne fait pas partie du système), notée $\vec{F}_{ext}(\vec{r})$, qui compense $\vec{F}(\vec{r})$, c'est-à-dire $\vec{F}_{ext}(\vec{r}) = -\vec{F}(\vec{r})$. L'intégrale (7) s'écrit alors :

$$U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A) = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{ext}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (9)$$

On peut ainsi exprimer l'énergie potentielle de la particule au point B :

$$U(\vec{r}_B) = U(\vec{r}_A) + \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_{ext}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (10)$$

L'équation (10) permet d'interpréter l'énergie potentielle de la particule au point B comme le travail de la force *externe* à exercer sur la particule pour la déplacer du point A au point B (à vitesse constante, car la résultante des forces qui s'exerce sur cette particule est alors nulle). En fixant la valeur de U au point A , (10) définit l'énergie potentielle de la particule en un point P quelconque, repéré par le vecteur position \vec{r} :

$$U(\vec{r}) = U(\vec{r}_A) + \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{F}_{ext}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (11)$$

L'expression (10) ne détermine $U(\vec{r})$ qu'à une constante $U(\vec{r}_A)$ près, que nous pouvons choisir arbitrairement. Seule la variation d'énergie potentielle $U(\vec{r}) - U(\vec{r}_A)$ entre les points A et P a

un sens physique. Par commodité, on choisit souvent pour A un point noté O de sorte que $U(\vec{r}_0) = 0$. On obtient alors :

$$U(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{ext}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (12)$$

Ainsi, l'énergie potentielle d'une particule à la position \vec{r} est définie comme le travail de la force externe à exercer sur la particule pour la déplacer d'une position \vec{r}_0 où son énergie potentielle est nulle par convention, à la position \vec{r} .

Nous avons défini l'énergie potentielle en terme de force externe afin de rendre ce concept intuitif, mais on peut aussi l'exprimer en terme de force *interne*, ce qui a pour avantage de ne faire référence qu'au système auquel appartient la particule :

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -W_{OP} \quad (13)$$

En terme de force interne, l'énergie potentielle d'une particule à la position \vec{r} est définie comme l'opposé du travail de la résultante des forces internes exercées sur la particule pour la déplacer d'une position \vec{r}_0 où son énergie potentielle est nulle par convention, à la position \vec{r} .

On peut montrer que toute force centrale est conservative, ce qui est le cas de la force gravitationnelle et de la force électrostatique.

Les deux expressions d'une force conservative

À partir de la définition d'une force (2) et de la relation entre une force conservative et l'énergie potentielle qui lui est associée (8), on obtient deux expressions d'une force conservative :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \quad (14)$$

Ces deux expressions nous seront utiles dans les démonstrations qui suivront. Nous insistons sur le fait que ces expressions résultent de *définitions* issues des notions fondamentales que sont l'espace, le temps et la masse.

Énergie potentielle d'un système de particules

À partir de la définition (12) de l'énergie potentielle d'une particule, on peut définir l'énergie potentielle d'un système de particules. Considérons un système isolé constitué de n particules dont les positions respectives sont repérées par les vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Supposons que ces particules interagissent par le biais de forces conservatives, par exemple un système de particules chargées interagissant par le biais de la force électrostatique. On définit l'énergie potentielle d'un système de particules dans une configuration donnée, par le travail que doit effectuer un agent extérieur pour construire le système à partir d'une configuration initiale de référence. Explicitons la manière de "construire" le système. Nous partons de la situation où toutes les particules du système sont infiniment éloignées les unes des autres, ce qui représente la configuration initiale de référence. Notons \vec{r}_1 la position de l'une des particules et rapprochons-en (à vitesse constante) une deuxième particule jusqu'à sa position finale \vec{r}_2 . Le déplacement de cette particule requiert le travail d'une force externe

pour vaincre la force qu'elle subit de la part de la première particule. Déplaçons maintenant une troisième particule jusqu'à sa position finale \vec{r}_3 . À nouveau, ceci requiert le travail d'une force externe pour vaincre les forces exercées par les deux premières particules situées en \vec{r}_1 respectivement \vec{r}_2 , sur cette troisième particule. On continue ceci jusqu'à la n -ème particule du système que l'on déplace jusqu'à sa position finale \vec{r}_n , ce qui requiert le travail d'une force externe pour vaincre les forces exercées par les $n - 1$ autres particules situées respectivement en $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{n-1}$, sur cette n -ème particule.

L'énergie potentielle d'un système dont les particules occupent les positions respectives $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ est donc la somme des travaux des forces externes à exercer sur chaque particule pour déplacer chacune d'elle d'une position \vec{r}_{i_0} où son énergie potentielle est nulle par convention, à sa position \vec{r}_i , où $i = 1, \dots, n$:

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \sum_i^n \int_{\vec{r}_{i_0}}^{\vec{r}_i} \vec{F}_{ext}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i = \sum_i^n U(\vec{r}_i) \quad (15)$$

En vertu de l'additivité des forces, le travail de la force externe à exercer sur la i -ème particule pour la déplacer jusqu'à sa position finale \vec{r}_i , en présence des $i - 1$ autres particules situées respectivement en $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{i-1}$ est la somme du travail de la force externe à exercer en présence de la 1^{ère} particule seulement et du travail de la force externe à exercer en présence de la 2^{ème} particule seulement, etc. Par conséquent, la somme des travaux des forces externes à exercer sur les particules du système pour les déplacer jusqu'à leur position finale est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue ces déplacements. Puisque les travaux des forces externes sont aussi indépendants des chemins suivis pour déplacer les particules (car les forces d'interaction entre les particules du système sont supposées conservatives), on en conclut que *l'énergie potentielle d'un système de particules est entièrement déterminée par les positions respectives $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ des particules du système* et nous notons cette énergie $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$. L'énergie potentielle *caractérise le système dans son ensemble*.

Énergie mécanique d'un système de particules

À partir de la définition de l'énergie cinétique (5) et de celle de l'énergie potentielle d'un système de particules (15), on définit *l'énergie mécanique d'un système de particules* comme la somme des énergies cinétiques des particules additionnée à l'énergie potentielle du système :

$$E_{mec} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \quad (16)$$

Les postulats de la mécanique classique

Le temps absolu

Lorsqu'Isaac Newton (1643-1727) pose les bases de la mécanique classique en 1685, il présuppose l'existence d'un temps universel et absolu :

"Le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément."

Newton postule en plus, l'existence d'un espace absolu :

"L'espace absolu, sans relation aux choses extérieures, demeure toujours similaire et immobile."

Cependant, ce postulat n'intervient pas dans le développement subséquent de sa mécanique. En outre, si l'on comprend la notion d'espace absolu comme un référentiel absolu, au repos, *que l'on peut distinguer des autres référentiels d'inertie*, alors ce postulat est en contradiction avec le principe de relativité galiléenne.

Le principe d'inertie

Le *principe d'inertie* formulé initialement par Galilée (1564-1642) stipule que :

Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne et uniforme aussi longtemps qu'aucune force extérieure ne vient modifier son état.

Un référentiel dans lequel le principe d'inertie est valable est appelé *référentiel d'inertie*. On montre facilement que si R est un référentiel d'inertie, alors tout référentiel R' se déplaçant en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à R est lui aussi un référentiel d'inertie.

Le principe de relativité galiléenne

C'est encore à Galilée que l'on doit la première expression du principe de relativité. Le principe de relativité galiléenne stipule que :

Les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie.

Une autre manière de formuler ce principe est de dire que :

Tous les référentiels d'inertie sont équivalents pour la description des phénomènes mécaniques.

Toutes les expériences confirment ce principe et plus tard, Einstein (1879-1955) étendra son domaine d'application à toutes lois physiques (exceptée la loi de la gravitation) pour en faire l'un des postulats de sa théorie de la relativité restreinte en 1905. En 1915, Einstein généralisera ce principe à tous les référentiels, y compris les référentiels accélérés, pour en faire l'un des postulats de sa théorie de la relativité générale.

Homogénéité, isotropie et uniformité de l'espace et du temps

Nous montrons ici que, des trois postulats énoncés ci-dessus découlent l'homogénéité, l'isotropie et l'uniformité de l'espace et du temps.

Homogénéité et isotropie de l'espace

Comme mentionné ci-dessus, deux référentiels d'inertie différents sont en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. De plus, les orientations des axes des repères liés à chaque référentiel peuvent être différentes, puisque ces orientations résultent d'un choix.

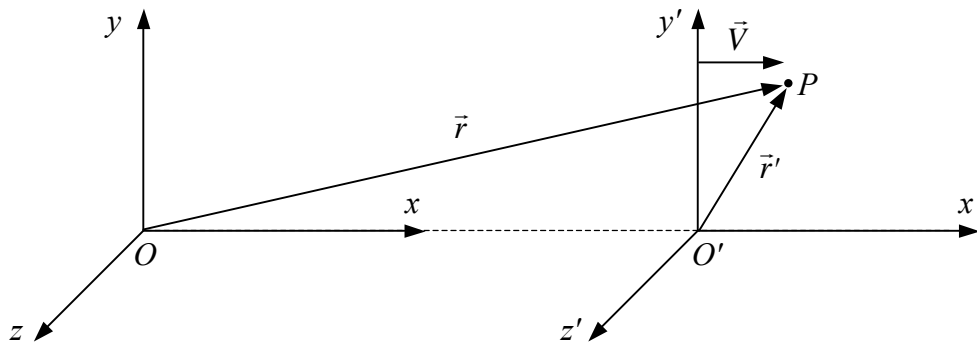
Par ailleurs, l'évolution d'un système de particules au cours du temps est régie par les lois du mouvement, lesquelles font intervenir les positions (les coordonnées) des particules du système par le biais de leurs interactions. Or, *la transformation qui relie les coordonnées des*

particules relativement à deux référentiels d'inertie différents est la combinaison d'une translation et d'une rotation.

Pour démontrer ceci, considérons deux référentiels d'inertie R et R' où R' se déplace à la vitesse \vec{V} par rapport à R . Nous notons (O, x, y, z) respectivement (O', x', y', z') les repères liés à ces deux référentiels. Si l'orientation des deux repères est la même, la *transformation de Galilée* permet d'exprimer les coordonnées $\vec{r} = (x, y, z)$ d'une particule dans R à l'instant t en fonction de ses coordonnées $\vec{r}' = (x', y', z')$ dans R' au même instant :

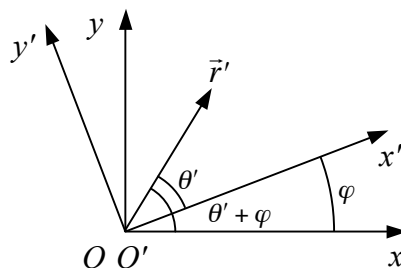
$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r}' + \vec{V}t \\ t = t' \end{cases}$$

où, à l'instant $t = t' = 0$, les origines O et O' des deux repères sont confondues. La transformation de Galilée résulte de considérations géométriques élémentaires, comme l'indique la figure ci-dessous (qui illustre une situation particulière où \vec{V} est parallèle à l'axe Ox) et du postulat stipulant l'existence d'un temps absolu, exprimé par la deuxième équation ci-dessus.



La première équation ci-dessus montre que pour toute particule du système, le vecteur \vec{r} est obtenu par une translation du vecteur \vec{r}' , en additionnant à ce dernier le vecteur $\vec{V}t$ qui est proportionnel au temps t .

Considérons maintenant deux repères *liés au même référentiel*, de mêmes origines et d'orientations différentes, c'est-à-dire que l'orientation du repère (O', x', y', z') est obtenue par une rotation d'un angle φ du repère (O, x, y, z) par rapport à un axe Δ donné. La figure ci-dessous illustre cette situation dans le cas particulier de repères en deux dimensions pour lesquels la rotation d'un angle φ est effectuée autour d'un axe perpendiculaire aux axes des repères et passant par leur origine commune.



Cela signifie que les coordonnées \vec{r} d'une particule exprimée par rapport au repère (O, x, y, z) en fonction de ses coordonnées \vec{r}' exprimée par rapport au repère (O', x', y', z') , est donnée par une rotation d'un angle φ des coordonnées de \vec{r}' par rapport à l'axe Δ :

$$\vec{r} = \Phi \vec{r}'$$

où Φ est un *opérateur* agissant sur l'espace \mathbb{R}^3 , correspondant à cette rotation.

Si maintenant, ce repère (O', x', y', z') est lié à un référentiel d'inertie R' qui se déplace à la vitesse \vec{V} par rapport au référentiel R auquel est lié le repère (O, x, y, z) , la transformation qui relie \vec{r} et \vec{r}' est donnée par :

$$\vec{r} = \vec{V}t + \Phi \vec{r}'$$

qui est bien la combinaison d'une translation et d'une rotation. Par conséquent, dire que les lois de la mécanique sont identiques dans tous les référentiels d'inertie revient à dire que ces lois sont invariantes par rapport à une translation et par rapport à une rotation (des coordonnées des particules) du système. C'est-à-dire que du point de vue mécanique, l'espace a les mêmes propriétés en chacun de ses points et dans toutes les directions ; on dit qu'il est *homogène et isotrope*.

Uniformité du temps

Le principe d'inertie mentionné plus haut signifie que, si une particule isolée est immobile ou en mouvement rectiligne et uniforme à un instant t_1 par rapport à un référentiel d'inertie, elle le sera encore à tout autre instant $t_2 > t_1$.

Une particule en mouvement rectiligne et uniforme se déplace à vitesse \vec{v} constante, donnée par :

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

D'après le principe d'inertie, cette vitesse constante est identique à tout instant, c'est-à-dire que la durée Δt nécessaire à la particule pour effectuer un déplacement $\Delta \vec{r}$ à un instant t_1 , est identique à celle nécessaire pour effectuer *le même déplacement* $\Delta \vec{r}$ à un autre instant $t_2 > t_1$. Cela signifie que l'écoulement du temps est le même à tout instant ; on dit que le temps s'écoule uniformément ou qu'il est *uniforme*.

Les démonstrations qui précèdent peuvent se résumer par le diagramme suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Temps absolu} \\ \text{Principe de relativité galiléenne} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{homogénéité et isotropie de l'espace}$$

$$\text{Principe d'inertie} \Rightarrow \text{uniformité du temps}$$

Statut et propriétés de l'énergie potentielle

Nous précisons dans cette partie le rôle que joue l'énergie potentielle dans les démonstrations qui suivront. Nous montrons ensuite que les propriétés de symétrie de l'espace et du temps imposent certaines propriétés à la fonction énergie potentielle ; elle ne peut *pas dépendre*

explicitement du temps d'une part et elle ne dépend que des *distances relatives* entre particules d'autre part.

Statut de l'énergie potentielle

L'évolution d'un système dépend des interactions des particules qui le composent et est régie par les lois du mouvement. Les interactions des particules d'un système étant décrites par l'énergie potentielle de ce dernier, les lois du mouvement doivent faire intervenir cette fonction. En vertu du principe de relativité galiléenne, ces lois doivent être identiques dans tous les référentiels d'inertie et il doit en être de même pour l'énergie potentielle. Ainsi, *l'énergie potentielle est la grandeur qui caractérise un système de particules et détermine complètement son évolution dans tout référentiel d'inertie*. C'est donc cette grandeur que nous allons considérer dans la suite et à laquelle nous imposerons les propriétés d'invariance qui découlent de l'homogénéité, de l'isotropie et de l'uniformité de l'espace et du temps.

L'énergie potentielle ne dépend pas explicitement du temps

Du fait de *l'uniformité du temps*, la fonction énergie potentielle d'un système isolé de particules *ne peut pas dépendre explicitement du temps*. Elle est donc de la forme :

$$U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$$

comme nous l'avons écrite dans l'expression données plus haut ; elle ne dépend donc que des positions respectives des particules du système au même instant. Cela implique qu'un changement de position de l'une des particules modifie *instantanément* l'énergie potentielle du système ; on peut dire que l'interaction se propage instantanément. *Cette instantanéité des interactions est inévitable en mécanique classique (non relativiste), puisqu'elle découle directement des postulats fondamentaux de cette dernière*, à savoir l'existence d'un temps absolu et le principe de relativité galiléenne. En effet, si l'interaction se propageait non pas instantanément mais à vitesse finie, cette dernière serait différente dans des référentiels différents (en mouvement relatif rectiligne et uniforme) puisque l'existence d'un temps absolu implique que la formule d'addition des vitesses de la relativité galiléenne est applicable à tous les phénomènes. Mais alors, les lois du mouvement des particules qui interagissent seraient différentes dans des référentiels d'inertie différents, ce qui contredirait le principe de relativité galiléenne. En conclusion, l'uniformité du temps impose à la fonction énergie potentielle d'un système isolé de particules de ne pas dépendre explicitement du temps, mais uniquement des positions respectives des particules du système au même instant. Cela implique l'instantanéité des interactions, cette instantanéité étant imposée par le postulat d'un temps absolu et le principe de relativité galiléenne.

On peut résumer ceci par le diagramme suivant :

$$\text{Principe d'inertie} \Rightarrow \text{uniformité du temps} \Rightarrow U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \Rightarrow \text{instantanéité des interactions} \left\{ \begin{array}{l} \text{Temps absolu} \\ \text{Principe de relativité} \end{array} \right.$$

L'énergie potentielle ne dépend que des distances relatives entre particules

Comme mentionné ci-dessus, l'énergie potentielle $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ d'un système isolé de particules ne dépend que des positions des particules. Mais, du fait de *l'homogénéité de l'espace*, toute translation du système dans l'espace doit laisser invariante la fonction énergie potentielle. Par conséquent, cette fonction ne doit dépendre que des *positions relatives* des particules ; elle est donc de la forme :

$$U = U(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

où $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ est un vecteur (la différence de deux vecteurs) exprimant la position relative de la i -ème et de la j -ème particule. En effet, une translation identique de toutes les particules du système ne modifie pas leurs positions relatives.

De plus, du fait de *l'isotropie de l'espace*, toute rotation du système dans l'espace doit laisser invariante la fonction énergie potentielle. Par conséquent, cette fonction ne doit dépendre que des *distances relatives* entre particules ; elle est donc de la forme :

$$U = U(\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|)$$

où $\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ est un scalaire (la norme d'un vecteur) exprimant la distance relative entre la i -ème et la j -ème particule. En effet, une rotation identique de toutes les particules du système ne modifie pas leurs distances relatives.

Uniformité du temps et conservation de l'énergie

Nous montrons ici que la loi de conservation de l'énergie mécanique découle de l'uniformité du temps.

Comme mentionné plus haut, l'uniformité du temps impose à la fonction énergie potentielle d'un système isolé de particules de ne pas dépendre explicitement du temps. Elle ne dépend donc qu'*implicitement* du temps, par le biais des positions $\vec{r}_i(t)$ des particules du système au même instant. Ainsi, une variation infinitésimale dU de la fonction énergie potentielle qui résulte d'une translation infinitésimale dt du système dans le temps, ne doit faire intervenir que cette dépendance implicite du temps.

Développons les calculs exprimant ce fait :

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i \quad (17)$$

En utilisant la relation (14) et le fait que $d\vec{r}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt$, on a :

$$dU = - \sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt \quad (18)$$

où $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ et $d\vec{r}_i/dt$ n'est autre que la vitesse \vec{v}_i :

$$dU = - \sum_i \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \vec{v}_i dt = - \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i dt \quad (19)$$

où $\frac{d\vec{v}_i}{dt} \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_i^2 \right)$:

$$dU = - \sum_i m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_i^2 \right) dt = - \frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) dt \quad (20)$$

d'où :

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) \quad (21)$$

On obtient finalement :

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) + U \right) = 0 \quad (22)$$

Ainsi, la grandeur $\sum_i \left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right) + U$ reste constante au cours du temps. Il s'agit de l'énergie mécanique du système. Donc, *l'énergie mécanique du système est conservée.*

Homogénéité de l'espace et conservation de la quantité de mouvement

Nous montrons ici que la loi de conservation de la quantité de mouvement découle de l'homogénéité de l'espace.

Du fait de cette homogénéité, toute translation dans l'espace d'un système isolé de particules doit laisser invariante la fonction énergie potentielle de ce système.

On appelle *translation dans l'espace* d'un système de particules, une transformation qui, à la position \vec{r}_i de chaque particule à un instant t , fait correspondre la position $\vec{r}_i + \vec{a}$ au même instant ; toutes les particules du système sont déplacées dans l'espace d'un segment \vec{a} de même orientation et de même longueur. Ainsi, une variation infinitésimale dU de l'énergie potentielle qui résulte d'une translation infinitésimale $d\vec{a}$ du système dans l'espace, doit être nulle.

Développons les calculs exprimant ce fait :

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i = 0 \quad (23)$$

En utilisant la relation (14) et le fait que $d\vec{r}_i = d\vec{a}$, on a :

$$dU = -\sum_i \frac{d\vec{p}_i}{dt} d\vec{a} = -d\vec{a} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0 \quad (24)$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0 \quad (25)$$

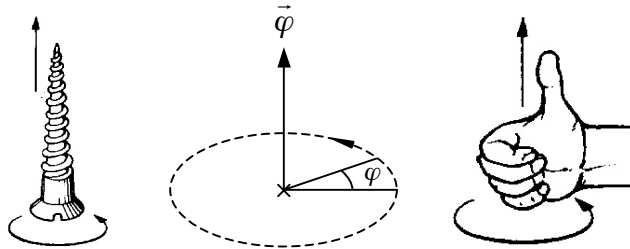
Ainsi, la grandeur $\sum_i \vec{p}_i$ reste constante au cours du temps. Il s'agit de la somme des quantités de mouvement des particules, que l'on appelle *quantité de mouvement du système*, notée \vec{P} . Donc, *la quantité de mouvement du système est conservée.*

Isotropie de l'espace et conservation du moment cinétique

Nous montrons ici que la loi de conservation du moment cinétique découle de l'isotropie de l'espace.

Du fait de cette isotropie, toute rotation dans l'espace d'un système isolé de particules doit laisser invariante la fonction énergie potentielle de ce système.

Une rotation est caractérisée par un axe (une droite) et un angle φ . À toute rotation, on peut associer un vecteur $\vec{\varphi}$ dont la norme est égale à l'angle de rotation φ , dont la direction coïncide avec l'axe de rotation et dont le sens est donné par la règle de la main droite (ou du tire-bouchon).



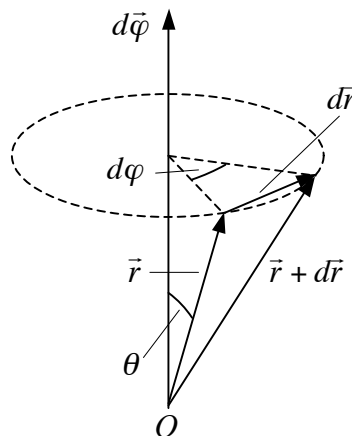
On appelle *rotation dans l'espace* d'un système de particules, une transformation qui, à la position \vec{r}_i de chaque particule à un instant t , fait correspondre la position obtenue par une rotation de cette particule au même instant ; toutes les particules du système subissent une rotation d'un même angle par rapport au même axe. Ainsi, une variation infinitésimale dU de l'énergie potentielle qui résulte d'une rotation infinitésimale $d\vec{\varphi}$ du système dans l'espace, doit être nulle.

Développons les calculs exprimant ce fait :

$$dU = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} d\vec{r}_i = 0 \quad (26)$$

Sans perte de généralité, nous plaçons l'origine du repère sur l'axe de rotation, ce qui permet d'exprimer la variation infinitésimale $d\vec{r}_i$ de la position de chaque particule due à une rotation $d\vec{\varphi}$:

$$d\vec{r}_i = d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i \quad (27)$$



En effet, on voit sur la figure ci-dessus que :

$$dr = r \sin \theta d\varphi$$

On reconnaît *la norme* du produit vectoriel de \vec{r} et $d\vec{\varphi}$ au membre de droite de l'égalité ci-dessus. De plus, le vecteur $d\vec{r}$ est perpendiculaire au plan déterminé par les vecteurs \vec{r} et $d\vec{\varphi}$. L'observation de la figure ci-dessus permet de conclure l'égalité (27).

En utilisant les relations (14) et (27), (26) s'écrit :

$$dU = \sum_i -\frac{d\vec{p}_i}{dt} (d\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = 0 \quad (28)$$

On utilise ici la propriété suivante du produit mixte de trois vecteurs \vec{A} , \vec{B} , et \vec{C} :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) \quad (29)$$

ce qui permet d'écrire (28) sous la forme :

$$dU = \sum_i d\vec{\varphi} \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt} \times \vec{r}_i \right) = -d\vec{\varphi} \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0 \quad (30)$$

où l'on a utilisé l'antisymétrie du produit vectoriel dans l'avant dernière égalité ci-dessus. Nous démontrons la propriété (29) dans l'annexe 2.

On utilise ici la règle de dérivation d'un produit vectoriel :

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{v}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (31)$$

où nous avons posé $\vec{v}_i \times \vec{p}_i = \vec{0}$ ci-dessus, puisque \vec{v}_i et \vec{p}_i sont colinéaires. Ainsi :

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (32)$$

En substituant (32) dans (30), on obtient :

$$dU = -d\vec{\varphi} \sum_i \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \vec{p}_i) = -d\vec{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = 0 \quad (33)$$

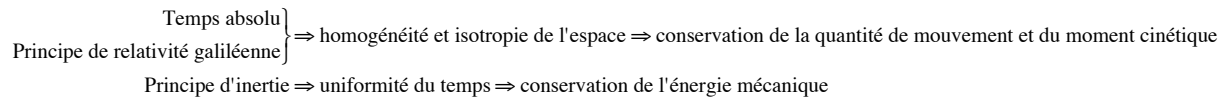
d'où :

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \vec{0} \quad (34)$$

Ainsi, la grandeur $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ reste constante au cours du temps. Il s'agit de la somme des moments cinétiques des particules, où le *moment cinétique* d'une particule est défini par $\vec{l}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$. Donc, *le moment cinétique du système, défini par $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ est conservé.*

Conclusion

Nous avons démontré que les postulats de la mécanique classique non relativiste impliquent l'homogénéité et l'isotropie de l'espace ainsi que l'uniformité du temps. De ces propriétés de symétrie de l'espace et du temps découlent directement les lois de conservation de la quantité de mouvement, du moment cinétique et de l'énergie mécanique. Ces démonstrations peuvent se résumer par le diagramme suivant :



Rappelons que ces trois lois de conservation sont équivalentes à toutes les lois de la mécanique classique. Par conséquent, l'évolution de tout système mécanique est complètement dictée par les propriétés de symétrie – très intuitives – de l'espace et du temps. Ceci est fascinant !

Références

- ISAAC NEWTON – *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1685).
- L. LANDAU et E. LIFCHITZ – *mécanique*, traduit du russe par Claude Ligny, Éditions en langues étrangères (1960).
- KITTEL, KNIGHT, RUDERMAN – *Berkeley : cours de physique, volume 1 – mécanique*, traduit par Pierre Lallemand, Armand Colin (1972).
- RICHARD FEYNMAN – *Le cours de physique de Feynman 1 Traitant surtout de la mécanique, du rayonnement et de la chaleur*, InterEditions (1979).
- DAVID HALLIDAY et ROBERT RESNICK – *mécanique – physique 1*, traduit et adapté par Réginald Sauvageau, Réjean Tanguay, Serge Gagnon, Éditions du Renouveau Pédagogique Inc. (1979).
- HEUGENE HECHT – *Physique*, traduit par T. Becherrawy, De Boeck Université (2000).
- JEAN HLADIK et MICHEL CHRYSOS – *Introduction à la relativité restreinte*, Dunod (2006).
- GILLES COHEN-TANNOUJJI – <http://www.gicotan.fr/>

Remerciements

Je remercie M. David Sénéchal, Professeur et Directeur du département de physique à l'Université de Sherbrooke, Canada, pour sa lecture attentive de cet article et les remarques dont il m'a fait part.

Annexe 1 Le gradient d'une fonction scalaire

Considérons une fonction scalaire $f(x,y,z)$ définie dans l'espace \mathbb{R}^3 et \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} des vecteurs de base dans un repère (O,x,y,z) . On définit le *gradient* de cette fonction, que l'on note ∇f ou encore $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}$, comme le vecteur formé par les dérivées partielles de cette fonction :

$$\nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

∇f est une *vecteur* qui exprime la variation de la fonction $f(x,y,z)$ au voisinage d'un point de coordonnées (x,y,z) . La direction du gradient ∇f est celle dans laquelle la fonction f augmente le plus rapidement.

On peut montrer que la différentielle df de la fonction f s'exprime comme suit en fonction du gradient :

$$df(\vec{r}) = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

Annexe 2 Propriétés du produit mixte

Propriété 1

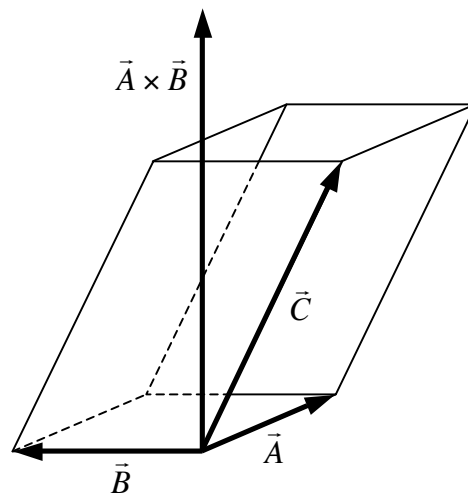
Le scalaire :

$$\|(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}\| = V$$

est le volume d'un parallélépipède dont $\|\vec{A} \times \vec{B}\|$ est l'aire de la surface de base et \vec{C} , l'arête latérale. En étudiant la figure ci-contre, on voit que :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$$

On peut donc interchanger les produits scalaire et vectoriel sans modifier la valeur du produit mixte de trois vecteurs.



Propriété 2

Montrons maintenant la relation (29).

Nous partons de la propriété 1 ci-dessus :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

En utilisant à nouveau la propriété 1 :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$

En utilisant la propriété d'antisymétrie du produit vectoriel, on obtient :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B} = -(\vec{A} \times \vec{C}) \cdot \vec{B} = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$$

Ainsi :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C})$$

ce qui achève notre démonstration de la relation (29).