Les hémisphères de Magdebourg

Par Pascal Rebetez
Mars 2008

Introduction

Dans l'expérience historique des hémisphères de Magdebourg réalisée par von Guericke en 1654, des chevaux tentent de séparer deux hémisphères plaqués l'un contre l'autre sous l'effet de la pression atmosphérique, la sphère ayant été préalablement vidée de son air (Fig. 1).

Figure 1 *Des chevaux tentent de séparer deux hémisphères plaqués l'un contre l'autre sous l'effet de la pression atmosphérique.*

Nous proposons de calculer l'intensité minimale de la force que ces chevaux doivent exercer sur ces hémisphères pour les séparer.

Calculs

En tout point de la sphère, l'atmosphère exerce une force pressante perpendiculaire à sa surface (Fig. 2).

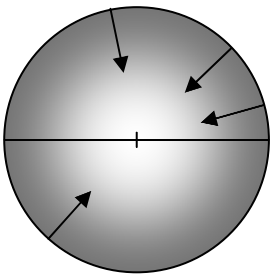

Figure 2 *Forces exercées par l'atmosphère en chaque point de la sphère.*

En décomposant l'une de ces forces dans la direction perpendiculaire au plan de séparation des hémisphères d'une part et dans le plan parallèle à celui-ci d'autre part, on constate que cette dernière composante est compensée par la composante dans ce même plan de la force diamétralement opposée, où le diamètre dont il est ici question est celui du cercle passant par le point d'application de la force (P) et dont le plan est parallèle au plan de séparation des hémisphères (Fig. 3).

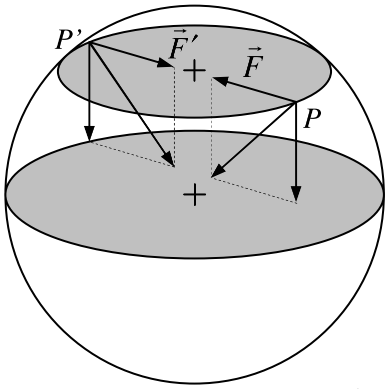

***Figure 3** Toute composante $\vec{F}$ parallèle au plan de séparation des hémisphères, est compensée par une autre composante $\vec{F}'$ diamétralement opposée.*

Des forces pressantes exercées par l'atmosphère sur la surface de la sphère, seules les composantes dans la direction perpendiculaire au plan de séparation des hémisphères sont à prendre en considération. Ce sont celles-ci qui plaquent les deux hémisphères l'un contre l'autre.
La force subie par un élément de surface dA de la sphère est donnée par :

$$dF = pdA$$

où p est la pression atmosphérique.
Pour exprimer dA, on utilise pour des raisons de symétrie, un repère cartésien dont l'origine est au centre de la sphère et l'axe z, perpendiculaire au plan de séparation des hémisphères. Nous choisissons évidemment des coordonnées sphériques (Fig. 4).

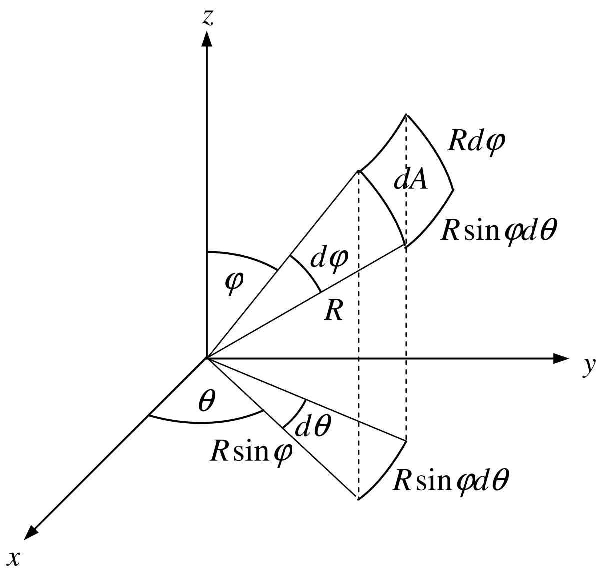

***Figure 4** Pour des raisons de symétrie, on choisit un système de coordonnées sphériques.*

À l'aide de cette figure, on déduit :

$$dA = R^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$$

où R est le rayon de la sphère.
D'où :

$$dF = pR^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$$

La composante dF_z de cette force dans la direction z, est donnée par :

$$\begin{aligned} dF_z &= \cos\varphi dF \\ &= pR^2 \sin\varphi \cos\varphi d\varphi d\theta \end{aligned}$$

La contribution de toutes les forces s'exerçant en chaque point de chaque hémisphère, s'obtient en intégrant cette expression sur toute la surface d'un hémisphère d'aire A :

$$\begin{aligned} F_z &= \oiint_A dF_z \\ &= pR^2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \sin\varphi \cos\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

L'intégrale sur la variable θ donne 2π et celle sur la variable φ, donne $-\frac{1}{2}\cos^2\varphi$ à évaluer entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\pi}{2} - \cos^2 0\right) = \frac{1}{2}$$

Finalement :

$$F_z = pR^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\pi$$

d'où :

$$\boxed{F_z = p\pi R^2}$$

Discussion du résultat

Les hémisphères sont plaqués l'un contre l'autre avec une force dont l'intensité est égale à la pression atmosphérique multipliée par l'aire de leur plan de séparation (un disque de rayon R). Le résultat est le même que celui que l'on obtiendrait en remplaçant les deux hémisphères par deux demi cylindres de même rayon (Fig. 5).

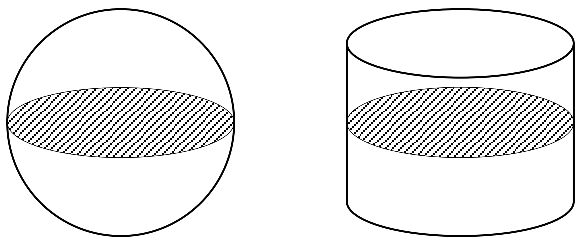

Figure 5 *L'intensité de la force qui plaque deux hémisphères et deux demi cylindre de mêmes rayons est la même.*