Quantité de mouvement
Les systèmes de masse variable

Introduction

À partir du Moyen Âge, on s'est rendu compte que la vitesse ne suffisait pas à expliquer toutes les caractéristiques d'un mouvement. Pourquoi par exemple, est-il préférable de se faire percuter par une mouche volant à 60 km/h plutôt que par un camion roulant à la même vitesse ? Vers 1330, un Parisien nommé Jean Buridan eut l'intuition que la grandeur cruciale à prendre en considération pour décrire le mouvement, était le produit de la vitesse par la quantité de matière. Il fallut donc faire appel à une nouvelle quantité fondamentale, le produit de la masse par la vitesse ($m\vec{v}$). C'est cette grandeur qu'Isaac Newton (1642-1727) appela **momentum**, qui se traduit en français par **quantité de mouvement** (symbole $\vec{p}$) et qu'il utilisa dans la formulation de sa théorie du mouvement : $\vec{p} = m\vec{v}$.

Quantité de mouvement et force

Pour modifier la quantité de mouvement d'un objet, il faut exercer une force sur celui-ci. C'est en terme de quantité de mouvement que Newton formula sa deuxième loi (ou principe fondamental de la dynamique). Dans un langage moderne, cette loi peut s'énoncer comme suit :

La résultante des forces exercées sur un corps est égale à la variation de sa quantité de mouvement, divisée par la durée de cette variation.

Il est possible que la force résultante varie pendant l'intervalle de temps où elle est appliquée, raison pour laquelle cette loi concerne une force résultante moyenne :

$$\boxed{\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} \qquad (1)$$

- $\vec{F}_m$: force résultante moyenne, en N.
- $\Delta\vec{p}$: variation de la quantité de mouvement, en kg·m/s.
- Δt : intervalle de temps pendant lequel la force agit, en s.

La relation (1) peut être considérée comme une définition dynamique de la force, car m, v et t peuvent être mesurés. Par conséquent, 1 Newton est défini comme la force qui, agissant sur un corps quelconque, produit une variation de sa quantité de mouvement égale à 1 kg·m/s en 1 s, soit :

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg·m/s}^2$$

En faisant tendre la durée Δt vers 0, on obtient la deuxième loi de Newton pour une force résultante instantanée :

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}} \qquad (2)$$

Remarquons que cette dernière relation englobe les situations dans lesquelles la masse peut varier, car :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

où $\frac{dm}{dt} \neq 0$ si la masse du corps sur lequel s'exerce la force, varie au cours du temps. Dans le cas particulier où la masse m est constante, $\frac{dm}{dt} = 0$ et la deuxième loi de Newton prend sa forme la plus couramment utilisée :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} = m\vec{a}$$

La loi (2) s'applique à une unique particule de masse m, mais on peut montrer qu'elle reste valable pour un système de n particules de masses respectives m_1, m_2, …, m_n :

$$\boxed{\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}} \qquad (3)$$

- $\vec{F}_{ext}$: résultante des forces *externes* exercées sur le système.
- $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + ... + \vec{p}_n = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n$: quantité de mouvement totale du système.

L'équation (3) est l'expression mathématique de la ***deuxième loi de Newton s'appliquant aux systèmes de particules.***

La fusée, un exemple de système de masse variable

Lors de sa propulsion, une fusée consomme son carburant et éjecte par ses réacteurs le gaz résultant de cette combustion. Sa masse diminue au fur et à mesure de cette consommation. Nous supposons que la fusée éjecte des gaz avec un débit massique D constant ($D = \frac{\Delta m}{\Delta t}$, en kg/s) et une vitesse (mesurée par rapport à la fusée) constante. Nous cherchons à exprimer la force de propulsion de la fusée (force exercée par les gaz sur la fusée). Notons m, la masse de la fusée et v_1 sa vitesse à l'instant t, m^* sa masse et v_1^* sa vitesse après un intervalle de temps Δt (où $m^* < m$ puisque la fusée a éjecté des gaz et donc diminué de masse pendant cet intervalle de temps).

Système isolé

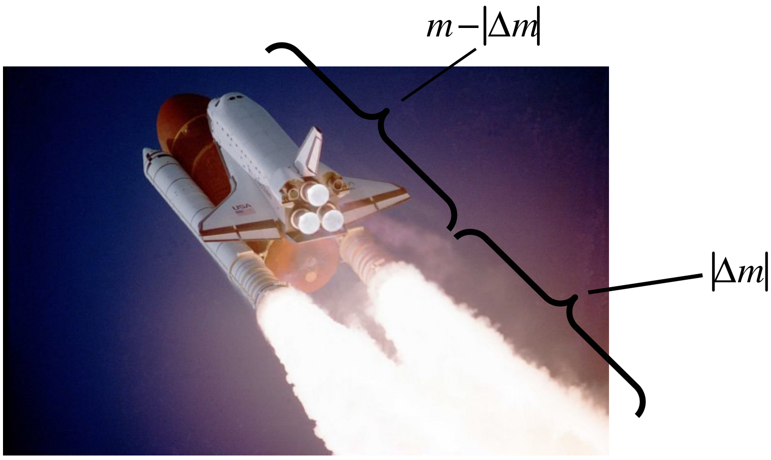
Dans un premier temps, supposons que le système gaz-fusée soit isolé (la fusée est par exemple loin de tout astre) et le mouvement de la fusée, rectiligne. Nous pouvons dans ce cas appliquer à ce système le principe de conservation de la quantité de mouvement :

$$P = P^*$$
$$p_1 = p_1^* + p_2^*$$

où p_1 est la quantité de mouvement de la fusée à l'instant t, p_1^* sa quantité de mouvement à l'instant $t + \Delta t$ et p_2^* la quantité de mouvement des gaz éjectés à l'instant $t + \Delta t$, dont la masse $m - m^*$ est égale à la diminution de masse de la fusée pendant l'intervalle de temps Δt. D'où :

$$mv_1 = m^* v_1^* + (m - m^*) v_2^*$$

La variation de masse Δm de la fusée pendant l'intervalle de temps Δt est égale à $m^* - m$, d'où $\Delta m < 0$ (c.f. fig. ci-dessous).



On peut donc écrire $m^* = m + \Delta m$ et $m - m^* = -\Delta m$. L'équation ci-dessus devient alors :

$$mv_1 = (m + \Delta m) v_1^* - \Delta m v_2^*$$

De plus, d'après la définition du débit massique D donnée plus haut, on peut écrire $\Delta m = D \Delta t$, ce qui donne :

$$mv_1 = mv_1^* - \underbrace{(v_2^* - v_1^*)}_{v_{rel}} D \Delta t$$

où le terme $v_2^* - v_1^* \equiv v_{rel}$ est la différence entre la vitesse des gaz éjectés et la vitesse de la fusée, autrement dit la vitesse des gaz mesurée relativement à la fusée (dans le référentiel de la fusée), supposée constante rappelons-le. On peut écrire :

$$mv_1 = mv_1^* - v_{rel} D \Delta t$$

En notant $\Delta v_1 \equiv v_1^* - v_1$ et en réarrangeant les termes de cette dernière équation, on obtient :

$$m\Delta v_1 = v_{rel} D \Delta t$$

La division de cette équation par Δt, donne :

$$m\underbrace{\frac{\Delta v_1}{\Delta t}}_{a_{1_m}} = v_{rel} D$$

Le terme $a_{1_m} \equiv \frac{\Delta v_1}{\Delta t}$ est l'accélération moyenne de la fusée. En faisant tendre vers 0 l'intervalle de temps Δt, on obtient son accélération instantanée et l'équation ci-dessus devient :

$$\underbrace{ma_1}_{F_{res}} = v_{rel} D$$

où le terme ma_1 est, en vertu de la deuxième loi de Newton, la résultante des forces F_{res} qui s'exercent sur la fusée. Le terme $v_{rel}D$ a pour unité le $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} = \mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, qui est l'unité d'une masse multipliée par une accélération, c'est-à-dire une force, toujours en vertu de la deuxième loi de Newton. Cette force est exercée par les gaz sur la fusée lors de leur éjection, c'est donc la force de propulsion. Cette force résulte de l'interaction entre les gaz et la fusée constituant tous deux le système considéré. On dit pour cette raison, que c'est une **force interne** au système. On voit que la résultante des forces exercées sur la fusée (l'un des deux objets du système fusée-gaz) est une force interne : $F_{res} = F_{\text{int}}$.

L'intensité de la force de propulsion de la fusée est égale au produit du débit massique des gaz éjectés par leur vitesse d'éjection **:**

$$\boxed{F_{prop} = v_{rel} D} \qquad (4)$$

Remarquons que cette force ne dépend ni de la masse, ni de la vitesse de la fusée et qu'elle est de plus constante si la vitesse d'éjection et le débit massique des gaz sont constants.

Système non-isolé

Considérons maintenant le cas où le système gaz-fusée n'est pas isolé (la fusée est par exemple entrain de décoller d'une planète et subit sa force gravitationnelle (c.f. fig. ci-dessous)).

Le principe de conservation de la quantité de mouvement n'est plus valable dans cette situation. Nous pouvons cependant appliquer la 2ème loi de Newton (équation (3) pour un intervalle de temps Δt fini) :

$$F_{ext_m} = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

où $\Delta P \equiv P^* - P$ avec $P = mv_1$ et $P^* = mv_1^* - v_{rel} D\Delta t$, comme nous l'avons vu plus haut. En utilisant les résultats obtenus dans le cas du système isolé, on obtient :

$$\Delta P = m\Delta v_1 - v_{rel} D\Delta t$$

D'où :

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = m\frac{\Delta v_1}{\Delta t} - v_{rel} D$$

En substituant cette dernière relation dans la deuxième loi de Newton, on obtient :

$$F_{ext_m} = m\frac{\Delta v_1}{\Delta t} - v_{rel} D$$

En prenant la limite $\Delta t \to 0$, cela donne finalement :

$$F_{ext} = ma_1 - v_{rel} D$$

où F_{ext} est la résultante des forces externes (instantanées) exercée sur la fusée, a_1 l'accélération (instantanée) de la fusée. En réarrangeant les termes de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\underbrace{ma_1}_{F_{res}} = F_{ext} + \underbrace{v_{rel} D}_{F_{\text{int}}}} \qquad (5)$$

On voit cette fois que la résultante des forces exercée sur la fusée (l'un des deux objets du système fusée-gaz) est la somme des forces externes et des forces internes :

$$\boxed{F_{res} = F_{ext} + F_{\text{int}}} \qquad (6)$$

et que, comme dans le cas du système isolé :

***L'intensité de la force de propulsion de la fusée est égale au produit du débit massique des gaz éjectés par leur vitesse d'éjection* :**

$$\boxed{F_{propulsion} = v_{rel} D}$$