Lundi 3 janvier 2005 à 17

Calculer des aires

Calculer l'aire d'un rectangle, d'un parallélogramme ou d'un quadrilatère, c'est-à-dire l'aire d'un domaine du plan délimité par quatre droites, est une chose aisée. Mais lorsque l'aire à calculer est délimitée par des lignes courbes la tâche est plus délicate. Il existe plusieurs techniques pour résoudre ce type de problème. Nous allons en examiner une qui, en utilisant les coordonnées curvilignes, permet de ramener le calcul de l'aire d'une surface délimitée par des courbes à celui de l'aire d'un rectangle.

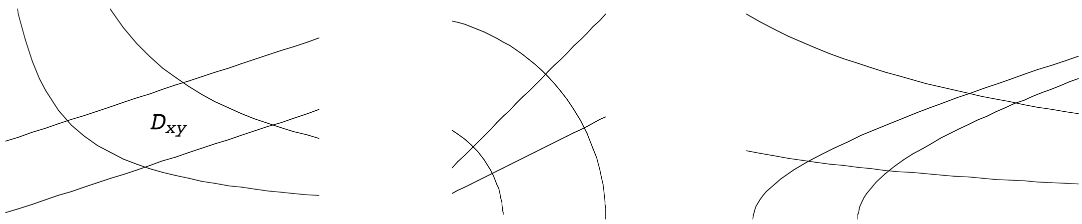

Fig. 1 : Le calcul de l'aire d'un domaine D_{xy} du plan défini par des courbes peut se ramener au calcul de l'aire d'un rectangle.

Considérons un domaine D_{xy} délimité par des courbes. L'intégrale $\int\int_{D_{xy}} dx\, dy$ mesure son aire. Si les courbes se transforment en droites dans un système de coordonnées curvilignes u, v, l'aire de D_{xy} peut se calculer par :

$$\int\int_{D_{xy}} dx\, dy = \int\int_{D_{uv}} A_{(x,\, y)}(u,\; v)\, du\, dv$$

où $A_{(x,\, y)}(u,\; v)$ est le facteur local de conversion des aires lorsqu'on passe des coordonnées curvilignes u, v aux coordonnées cartésiennes x, y. Ce facteur, appelé déterminant fonctionnel ou jacobien, est donné par :

$$A_{(x,\, y)}(u,\; v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

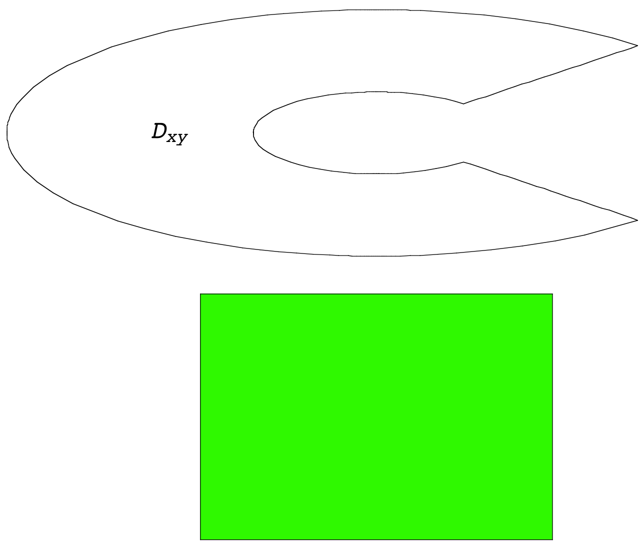

Fig. 2 : Le calcul de l'aire du domaine D_{xy} délimité par des courbes peut se ramener au calcul de l'aire d'un rectangle.

Prochaine réunion : lundi 7 février 2005 à 17 h

Travaux pratiques

■ Exercices

Différents domaines D_{xy} du plan sont définis par :

1) $y = 0.8x$
$y = 0.8x + 0.5$
$xy = 0.2$
$xy = 0.6$

2) $y = 0.5x$
$y = x$
$y = \sqrt{1 - x^2}$
$y = \sqrt{4 - x^2}$

3) $y = 2/x$
$y = 6/x$
$y = \sqrt{x^2 - 3}$
$y = \sqrt{x^2 - 5}$

a) Dessinez chacun de ces domaines.
b) Utilisez des coordonnées curvilignes $u(x, y)$ et $v(x, y)$ afin d'obtenir, pour chacun de ces domaines, un domaine D_{uv} rectangulaire dans le plan uv et dessinez ce domaine D_{uv} dans le plan uv.
c) Calculez les aires des différents domaines D_{xy} à partir de celles des domaines D_{uv}.

4) Un domaine D_{xy} est défini par :
$x(u, v) = 3u \cos v$
$y(u, v) = u \sin v$
$u_{\min} = 1$
$u_{\max} = 3$
$v_{\min} = \frac{\pi}{4}$
$v_{\max} = \frac{7\pi}{4}$

a) Dessinez ce domaine.
b) Calculez sa surface.
c) Dessinez un rectangle de même surface que le domaine D_{xy}.

Calculer des aires

■ Exercices

1a) Dessinons le domaine D_{xy} défini par $y = 0.8x$, $y = 0.8x + 0.5$, $xy = 0.2$ et $xy = 0.6$.

```
f1[x_] := 8 x / 10
f2[x_] := 8 x / 10 + 1 / 2
f3[x_] := 2 / (10 x)
f4[x_] := 6 / (10 x)
Plot[{f1[x], f2[x], f3[x], f4[x]}, {x, 0.1, 1}, PlotRange → {{0, 1}, {0, 1.5}},
  TextStyle → {FontSlant → "Italic", FontSize → 12},
  Epilog → {Text["Dxy", {0.5, 0.7}, {-1, 0}]}, AxesLabel → {"x", "y"}];
```

1b) Passons en coordonnées curvilignes $u(x, y)$ et $v(x, y)$ afin d'obtenir un domaine D_{uv} rectangulaire dans le plan uv en utilisant la correspondance $u(x, y) = y - 0.8x$ et $v(x, y) = xy$. Cherchons les coordonnées $(u_{\min}, v_{\min})$ et $(u_{\max}, v_{\max})$ des sommets définissant le domaine D_{uv} et dessinons-le :

```
Clear[x, y, u, v];
{u[x_, y_], v[x_, y_]} = {y - 4 / 5 x, x * y};
Show[Graphics[{GrayLevel[0.8], Rectangle[
     {u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}], GrayLevel[0],
    Line[{{u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f3[x]]}}],
    Line[{{u[x, f2[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}}],
    Line[{{u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}, {u[x, f1[x]], v[x, f4[x]]}}],
    Line[{{u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f1[x]], v[x, f4[x]]}}]}],
  PlotRange → {{u[x, f1[x]], u[x, f2[x]]}, {v[x, f3[x]], v[x, f4[x]]}},
  Axes → True, TextStyle → {FontSlant → "Italic", FontSize → 12},
  Epilog → {Text["Duv", {(u[x, f1[x]] + u[x, f2[x]]) / 2,
      (v[x, f3[x]] + v[x, f4[x]]) / 2}, {-1, 0}]}, AxesLabel → {"u", "v"}];
```

1c) L'aire du domaine D_{xy} est donnée par $\int\int_{D_{uv}} A_{(x,y)}(u,\ v)\, du\, dv$. Exprimons x et y en fonction de u et v. Comme le domaine D_{xy} est défini par des coordonnées positives, nous retenons les solutions positives pour définir le jacobien $A_{(x,y)}(u,\ v)$ de la transformation, jacobien qui nous permet de calculer l'aire de D_{xy} :

```
sol = Solve[{u == u[x, y], v == v[x, y]}, {x, y}];
sol[[2, 1, 2]];
sol[[2, 2, 2]];
Clear[Axy, gradx, grady]
x[u_, v_] = sol[[2, 1, 2]];
y[u_, v_] = sol[[2, 2, 2]];
gradx[u_, v_] = {D[x[u, v], u], D[x[u, v], v]};
grady[u_, v_] = {D[y[u, v], u], D[y[u, v], v]} ;
Axy[u_, v_] = Abs[Det[{gradx[u, v], grady[u, v]}]];
Integrate[Axy[u, v], {u, 0, u[x, f2[x]]}, {v, v[x, f3[x]], v[x, f4[x]]}]
% // N
```

2a) Dessinons le domaine D_{xy} défini par $y = 0.5x$, $y = x$, $y = \sqrt{1 - x^2}$ et $y = \sqrt{4 - x^2}$

```
f1[x_] := x / 2
f2[x_] := x
f3[x_] := Sqrt[1 - x^2]
f4[x_] := Sqrt[4 - x^2]
g1 = Plot[f1[x], {x, 0.5, 2}, DisplayFunction → Identity];
g2 = Plot[f2[x], {x, 0.5, 2}, DisplayFunction → Identity];
g3 = Plot[f3[x], {x, 0.5, 1}, DisplayFunction → Identity];
g4 = Plot[f4[x], {x, 0.5, 2}, DisplayFunction → Identity];
aire = Show[g1, g2, g3, g4,
   DisplayFunction → $DisplayFunction , AspectRatio → Automatic];
```

2b) Utilisons la correspondance $u(x, y) = \frac{y}{x}$ et $v(x, y) = x^2 + y^2$. Cherchons les coordonnées $(u_{\min}, v_{\min})$ et $(u_{\max}, v_{\max})$ des sommets définissant le domaine D_{uv} et dessinons-le :

```
Clear[x, y, u, v];
{u[x_, y_], v[x_, y_]} = {y / x, x^2 + y^2};
Show[Graphics[{GrayLevel[0.8], Rectangle[
     {u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}], GrayLevel[0],
    Line[{{u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f3[x]]}}],
    Line[{{u[x, f2[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}}],
    Line[{{u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}, {u[x, f1[x]], v[x, f4[x]]}}],
    Line[{{u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f1[x]], v[x, f4[x]]}}]}],
  PlotRange → {{u[x, f1[x]], u[x, f2[x]]}, {v[x, f3[x]], v[x, f4[x]]}},
  Axes → True, Epilog → {Text["Duv", {(u[x, f1[x]] + u[x, f2[x]]) / 2,
      (v[x, f3[x]] + v[x, f4[x]]) / 2}, {-1, 0}]}, AxesLabel → {"u", "v"}];
```

2c) Calculons l'aire de D_{xy} :

```
sol = Solve[{u == u[x, y], v == v[x, y]}, {x, y}];
sol[[2, 2, 2]];
sol[[2, 1, 2]];
Clear[Axy, gradx, grady]
x[u_, v_] = sol[[2, 2, 2]];
y[u_, v_] = sol[[2, 1, 2]];
gradx[u_, v_] = {D[x[u, v], u], D[x[u, v], v]};
grady[u_, v_] = {D[y[u, v], u], D[y[u, v], v]} ;
Axy[u_, v_] = Abs[Det[{gradx[u, v], grady[u, v]}]];
Integrate[Axy[u, v],
 {u, u[x, f1[x]], u[x, f2[x]]}, {v, v[x, f3[x]], v[x, f4[x]]}]
% //
 N
```

3a) Dessinons le domaine D_{xy} défini par $y = 2/x$, $y = 6/x$, $y = \sqrt{x^2 - 3}$ et $y = \sqrt{x^2 - 5}$:

```
f1[x_] := 2 / x
f2[x_] := 6 / x
f3[x_] := Sqrt[x^2 - 3]
f4[x_] := Sqrt[x^2 - 5]
u2 = Plot[f1[x], {x, 1.5, 3.5}, DisplayFunction → Identity];
u6 = Plot[f2[x], {x, 1.5, 3.5}, DisplayFunction → Identity];
v3 = Plot[f3[x], {x, Sqrt[3], 3.5}, DisplayFunction → Identity];
v5 = Plot[f4[x], {x, Sqrt[5], 3.5}, DisplayFunction → Identity];
aire = Show[u2, u6, v3, v5, DisplayFunction → $DisplayFunction ];
```

3b) Utilisons la correspondance $u(x, y) = xy$ et $v(x, y) = x^2 - y^2$. Cherchons les coordonnées $(u_{\min}, v_{\min})$ et $(u_{\max}, v_{\max})$ des sommets définissant le domaine D_{uv} et dessinons-le :

```
Clear[x, y, u, v];
{u[x_, y_], v[x_, y_]} = {x * y, x^2 - y^2};
Show[Graphics[{GrayLevel[0.8], Rectangle[
     {u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}], GrayLevel[0],
    Line[{{u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f3[x]]}}],
    Line[{{u[x, f2[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}}],
    Line[{{u[x, f2[x]], v[x, f4[x]]}, {u[x, f1[x]], v[x, f4[x]]}}],
    Line[{{u[x, f1[x]], v[x, f3[x]]}, {u[x, f1[x]], v[x, f4[x]]}}]}],
  PlotRange → {{u[x, f1[x]], u[x, f2[x]]}, {v[x, f3[x]], v[x, f4[x]]}},
  Axes → True, Epilog → {Text["Duv", {(u[x, f1[x]] + u[x, f2[x]]) / 2,
      (v[x, f3[x]] + v[x, f4[x]]) / 2}, {-1, 0}]}, AxesLabel → {"u", "v"}];
```

Le corrigé complet est disponible sur : http://hypatie.ge.ch

3c) Calculons l'aire de D_{xy} :

```
sol = Solve[{u == u[x, y], v == v[x, y]}, {x, y}];
sol[[2, 1, 2]];
sol[[2, 2, 2]];
Clear[Axy, gradx, grady]
x[u_, v_] = sol[[2, 1, 2]];
y[u_, v_] = sol[[2, 2, 2]];
gradx[u_, v_] = {D[x[u, v], u], D[x[u, v], v]};
grady[u_, v_] = {D[y[u, v], u], D[y[u, v], v]} ;
Axy[u_, v_] = Abs[Det[{gradx[u, v], grady[u, v]}]];
Integrate[Axy[u, v], {u, 0, u[x, f2[x]]}, {v, v[x, f3[x]], v[x, f4[x]]}]
% // N
```

4a) Dessinons le domaine domaine D_{xy} défini par $x(u, v) = 3u \cos v$, $y(u, v) = u \sin v$, $u_{\min} = 1$, $u_{\max} = 3$, $v_{\min} = \frac{\pi}{4}$, $v_{\max} = \frac{7\pi}{4}$:

```
{x[u_, v_], y[u_, v_]} = {3 u * Cos[v], u * Sin[v]};
{umin, umax} = {1, 3};
{vmin, vmax} = {Pi / 4, 7 Pi / 4};
bordscourbes =
  ParametricPlot[{{x[umin, v], y[umin, v]}, {x[umax, v], y[umax, v]}},
   {v, vmin, vmax}, DisplayFunction → Identity];
bordsdroits = ParametricPlot[{{x[u, vmin], y[u, vmin]}, {x[u, vmax], y[u, vmax]}},
   {u, umin, umax}, DisplayFunction → Identity];
Show[bordscourbes, bordsdroits, AspectRatio → Automatic,
  PlotRange → {{-9.5, 9.5}, {-Pi, Pi}},
  TextStyle → {FontSlant → "Italic", FontSize → 12},
  Epilog → {Text["Dxy", {-5, 1}, {0, 0}]},
  AxesLabel → {"x", "y"}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

4b) Calculons l'aire de ce domaine :

```
Clear[gradx, grady, Axy]
gradx[u_, v_] = {D[x[u, v], u], D[x[u, v], v]};
grady[u_, v_] = {D[y[u, v], u], D[y[u, v], v]} ;
Axy[u_, v_] = Expand[Abs[Det[{gradx[u, v], grady[u, v]}]]];
Integrate[Abs[Axy[u, v]], {v, vmin, vmax}, {u, umin, umax}]
```

4c) Dessinons un rectangle de même surface :

```
Show[Graphics[{Hue[0.3], Rectangle[{-4.5, -Pi}, {4.5, Pi}], GrayLevel[0],
    Line[{{-4.5, -Pi}, {4.5, -Pi}, {4.5, Pi}, {-4.5, Pi}, {-4.5, -Pi}}]}],
  AspectRatio → Automatic, PlotRange → {{-7, 7}, {-4, 4}}, Frame → True,
  TextStyle → {FontSlant → "Italic", FontSize → 12}, FrameLabel → {"u", "v"}];
```