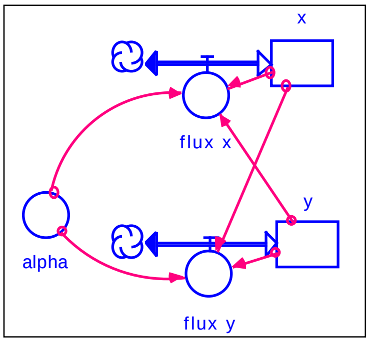
Lettre nº 18

Club STELLA

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 318.05.30



Responsable:
Bernard Vuilleumier

Mardi 19 janvier 1993 à 17 h

Comment simplifier les problèmes de modélisation

Plutôt que d'étudier la solution d'un système d'équations différentielles, on peut observer les points d'intersection de la trajectoire avec un plan

L'évolution de nombreux systèmes peut être convenablement décrite par un ensemble d'équations différentielles ordinaires. Mais la plupart du temps, ces équations ne sont pas intégrables et on doit étudier chaque solution en considérant la trajectoire dans l'espace des phases. Comme cela s'avère très fréquemment irréalisable, on simplifie au maximum cette tâche en faisant appel à une méthode mise au point par Henri Poincaré. Plutôt que d'étudier la solution d'un système d'équations à trois variables par exemple, on observe les points d'intersection de la trajectoire avec un plan. Ce plan de coupe peut, en principe, être quelconque mais un choix judicieux permet souvent d'obtenir des sections aisément exploitables. A partir d'une condition initiale, on obtient ainsi un ensemble de points formant la section ou *coupe de Poincaré*, c'est-à-dire une carte à deux dimensions. La transformation qui conduit d'un point au suivant est une application continue *f* du plan dans lui-même. La section de Poincaré présente les mêmes propriétés que le système d'équations qui lui a donné lieu. Si le système possède un attracteur par exemple, les caractéristiques structurales de ce dernier se retrouvent dans la section de Poincaré.

La section de Poincaré simplifie grandement les problèmes de modélisation du point de vue du temps et des moyens de calcul nécessaires

La méthode de Poincaré présente un grand intérêt pratique: elle permet de passer d'un système d'équations différentielles dans R^n à une application discrète de R^{n-1} dans R^{n-1}, entraînant une diminution considérable du nombre de données à traiter. En substituant aux équations différentielles dans R^3 des équations algébriques définissant la transformation *P* --> *f*(*P*) des points *P* du plan, elle remplace une évolution à temps continu par une application à intervalles de temps discrets. Pour la modélisation, il est évident qu'itérer une application du plan ou intégrer des équations différentielles sont deux tâches sans commune mesure en ce qui concerne le temps et les moyens de calcul nécessaires.

Travaux pratiques

Exercice 1

a) Construire un modèle STELLA correspondant à la transformation:

x(t+1) = n*x(t)*[(1-x(t)]

b) Etablir, pour n variant entre 1 et 4, le graphique x = f(t).

c) Reporter x(t+1) en fonction de x(t).

Exercice 2

a) Construire un modèle STELLA définissant la transformation du plan:

x(t+1) = x(t)*cos(a) - [y(t)-x(t)^2]*sin(a)

y(t+1) = x(t)*sin(a) + [y(t)-x(t)^2]*cos(a)

b) Etablir, pour a = 76.11°, les graphiques donnant l'évolution de x et de y.

c) Etablir le graphique y = f(x) pour différentes valeurs initiales de x.

Exercice 3

Il est possible d'appliquer la méthode de Poincaré aux équations de Lorenz qui modélisent la turbulence et ses principales propriétés. Ces équations sont données par :

dx/dt = Pr*(y - x)

dy/dt = - x*z + r*x - y

dz/dt = x*y - b*z

où Pr (nombre de Prandtl), b et r sont des paramètres.

a) Construire un modèle STELLA correspondant à ces trois équations.

b) Etablir, pour Pr=10, b=8/3 et r=24, les graphiques x=f(t), y=f(t) et z=f(t).

c) Reporter y=f(x), z=f(x) et z=f(y).

d) Comment pourrait-on obtenir une application de R^2 dans R^2 correspondant à ces 3 équations ?

Prochaine réunion: mardi 9 février 1993 à 17h.