Modélisation
Simulation

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 172
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50

Lettre n° 27

Mardi 18 janvier 1994 à 17 h

Les modèles chaotiques

Bernard Vuilleumier

La technique usuelle pour tester une théorie ne s'applique plus lorsque le modèle est chaotique

La recherche mathématique à propos du chaos remonte à 1890, époque à laquelle Henri Poincaré étudie la stabilité du système solaire. Il se demande si les planètes continueront indéfiniment leur course autour du Soleil, ou, si l'une d'entre elle ne pourrait pas quitter son orbite et se perdre dans la Galaxie, ou encore s'effondrer sur le Soleil. Il n'apporta pas de réponse à cette question mais il créa une nouvelle méthode d'analyse basée sur la géométrie de la dynamique et il découvrit la notion de chaos en étudiant le mouvement de trois corps exerçant l'un sur l'autre une force gravitationnelle.

La technique usuelle pour tester une théorie consiste à effectuer une série d'observations et à comparer le résultat des mesures aux prédictions théoriques. Mais, en présence de chaos, «l'effet papillon» invalide complètement cette démarche car les prédictions peuvent varier énormément selon les conditions initiales. Une infime erreur d'observation sur celles-ci peut donc entraîner une variation énorme sur les résultats prédits. Cela soulève toute une série de questions intéressantes:
• Comment définir précisément le chaos ?
• Quels sont les signes du chaos et comment les mesurer ?
• Quelle est la valeur d'un calcul numérique en présence de chaos ?
• Comment être sûr que les phénomènes que nous considérons comme chaotiques sont réellement chaotiques et pas simplement très compliqués et parfaitement prédictibles ? Par exemple, lorsque nous observons une série temporelle présentant un aspect chaotique (voir la lettre n° 26 du Club Math), comment être sûr qu'elle n'est pas simplement périodique avec une période extrêmement longue ?

Une infime erreur d'observation sur les conditions initiales conduit à des prévisions totalement erronées

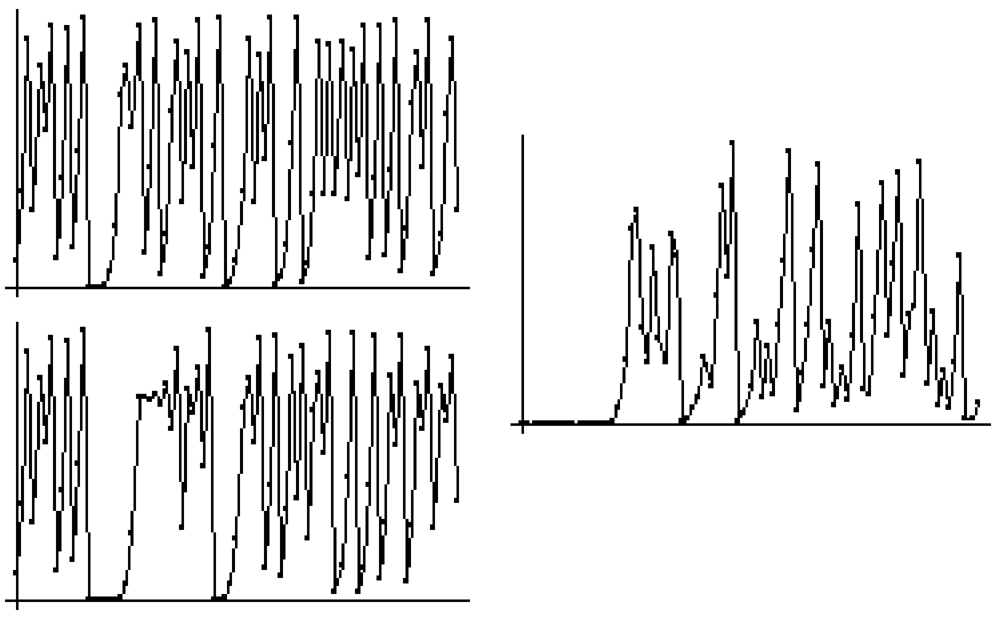

Fig.1 : Séries temporelles obtenues à l'aide d'un modèle chaotique. A gauche, comparaison de deux évolutions obtenues à partir du même modèle, mais pour une valeur initiale différant d'un millionième. A droite, évolution de la valeur absolue de la différence entre les deux séries temporelles. L'amplitude des erreurs est du même ordre de grandeur que l'amplitude des séries elles-mêmes. Ce comportement est typique des systèmes chaotiques.

Travaux pratiques

Il existe de nombreux systèmes dynamiques conduisant au chaos. Nous allons examiner le plus simple d'entre eux: l'itération de la transformation quadratique $x \rightarrow r\,x(1-x)$. La raison de ce choix – qui peut paraître artificiel – réside dans le fait que les phénomènes qualitatifs de cette transformation se retrouvent dans de très nombreux systèmes chaotiques étudiés en mathématiques et observés dans le monde physique. En outre, toutes les propriétés du chaos peuvent être mises en évidence et analysée mathématiquement à l'aide de cette transformation.

Une marque du chaos: la sensibilité aux conditions initiales
Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales est un trait commun à tous les systèmes chaotiques. L'exercice 1 met en évidence cette caractéristique.
Exercice 1
a) Etablir une série temporelle en itérant 80 fois la transformation quadratique $x \rightarrow r\,x(1-x)$ en partant de la valeur initiale $x_0 = 0.1$ avec $r = 4$.
b) Recommencer en ajoutant une erreur $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ à la valeur initiale.
c) Reporter la valeur absolue de la différence entre les deux séries en fonction du temps.
Exercice 2
a) Comparer la propagation de l'erreur initiale ε_0 dans le système dynamique $x \rightarrow r\,x(1-x)$ à la propagation se produisant dans le système linéaire $x \rightarrow cx$.
b) Pour chaque valeur calculée, former le rapport entre le résultat et l'erreur.
c) Exprimer la loi de propagation de l'erreur dans le système linéaire $x \rightarrow cx$.

Comment quantifier la sensibilité aux conditions initiales
Les résultats de l'exercice 1 montrent clairement que la propagation de l'erreur dans le système quadratique $x \rightarrow r\,x(1-x)$ n'est pas aussi simple que dans le cas d'un système linéaire. On peut toutefois observer que, durant les premières itérations du système quadratique, l'erreur croît régulièrement. Cela suggère une approche pour quantifier la sensibilité aux conditions initiales.
Exercice 3
a) Compter le nombre d'itérations nécessaires pour que l'erreur ε_n dépasse la valeur 0.1, en partant de différentes valeurs initiales x_0 et pour différentes erreurs initiales ε_0 (voir tableau ci-dessous).
b) En utilisant la loi de propagation de l'erreur dans un système linéaire (utilisation justifiée durant les premières itérations, car, au début, l'erreur croît régulièrement), calculer le facteur c qui caractérise la croissance de l'erreur.
c) Compléter le tableau suivant (pour une erreur seuil $\varepsilon_n = 0.1$):

x_0	erreur ε_0	nbr d'itérations n	erreur ε_n	ln c
0.202	0.001000			
0.202	0.000100			
0.202	0.000010			
0.202	0.000001			
0.347	0.001000			
0.347	0.000100			
...				
0.869	0.001000			
0.869	0.000100			
...				

Prochaine réunion: mardi 15 février 1994 à 17 h.