

Le pendule magnétique

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50

Bernard Vuilleumier

Lettre n° 30

*Un pendule oscillant
au-dessus de trois aimants
semble se comporter de
manière totalement chaotique*

*L'ensemble des positions de
départ qui amènent le pendule
au-dessus d'un aimant consti-
tue le bassin d'attraction de
l'aimant*

*La frontière séparant les
bassins d'attraction revêt
une forme très compliquée*

*La résolution d'une équation
à l'aide de la méthode de
Newton donne aussi lieu à des
bassins d'attraction*

Considérons une bille de fer suspendue à un fil. Ce dispositif constitue un pendule qui peut osciller dans toutes les directions. Plaçons trois forts aimants sur le sol en les disposant aux sommets d'un triangle équilatéral centré sur l'aplomb du point de suspension du pendule. Ajustons la longueur du fil de suspension pour que la bille soit près du sol lorsque le fil est vertical. Si nous plaçons la bille près d'un aimant, elle s'immobilisera au-dessus de l'aimant. Si nous la lâchons d'une position initiale quelconque, nous pouvons observer des changements brusques de direction lorsque la bille passe près d'un aimant. Les oscillations du pendule semblent être totalement chaotiques. La seule chose qu'il semble possible de prévoir, c'est que la bille s'immobilisera, après un certain temps, au-dessus d'un des trois aimants. Pour certaines positions initiales, nous pouvons certes deviner facilement au-dessus de quel aimant la bille s'arrêtera, mais, pour la plupart d'entre elles, il est pratiquement impossible de prévoir la position d'arrêt. On parle de *sensibilité de l'état final*. La notion de sensibilité est une notion centrale en théorie du chaos (voit les lettres M & S n° 27 et 28 ainsi que la lettre du club Math n° 29).

Chaque position d'arrêt appartient à un «bassin d'attraction». Le bassin d'attraction d'un aimant est l'ensemble des positions de départ qui amènent la bille au-dessus de cet aimant. Il y a donc trois bassins d'attraction pour notre pendule magnétique. L'arrêt du pendule en position verticale est théoriquement possible, mais il s'agit d'un équilibre instable: la moindre perturbation le ramènerait au-dessus d'un des trois aimants. La frontière entre ces trois bassins revêt une forme très compliquée. Si nous parvenons à la dessiner, nous pourrions prévoir l'état final du pendule pour n'importe quelle position initiale.

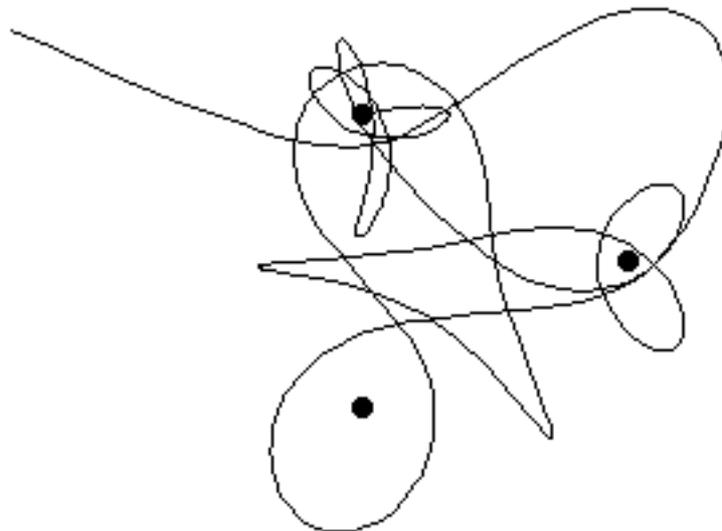


Fig. 1: Trajectoire d'un pendule dévié par trois aimants (vue de dessus). La position dans laquelle s'immobilise le pendule dépend du point de départ. Toutes les positions initiales qui conduisent au-dessus d'un même aimant constituent le bassin d'attraction de cet aimant.

Les bassins d'attraction ne se rencontrent pas qu'en physique, on les rencontre aussi en mathématiques. Lorsqu'on résout l'équation $x^3 - c = 0$ à l'aide de la méthode de Newton par exemple, on obtient, comme pour notre pendule magnétique, trois bassins d'attraction aux frontières extrêmement compliquées (voir la lettre du club Math n° 9).

Travaux pratiques

On peut déterminer expérimentalement les bassins d'attraction des aimants en observant les positions d'arrêt du pendule pour un grand nombre de positions initiales. Nous proposons ici une approche par simulation.

Exercice 1

Construire un modèle du pendule magnétique permettant d'obtenir sa trajectoire en faisant les hypothèses suivantes:

- la longueur du fil est grande comparée à la distance séparant les aimants (cette hypothèse permet de considérer que le mouvement de la bille s'effectue dans un plan plutôt que sur une surface sphérique);
- les aimants sont ponctuels;
- la force exercée par un aimant sur la bille est inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare;
- la force de rappel exercée sur le pendule est proportionnelle à l'écart par rapport à la position verticale;
- la force de frottement subie par le pendule est proportionnelle à la vitesse de la bille.

Exercice 2

Utiliser le modèle informatique du pendule magnétique pour déterminer le bassin d'attraction de différentes positions initiales.

Prochaine réunion: mardi 10 mai 1994 à 17 h.

