Modélisation

Simulation

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50

Lettre n^o 32

Mardi 13 septembre 1994 à 17 h

Rétroaction

Bernard Vuilleumier

Les processus à rétroaction sont fondamentaux dans toutes les disciplines scientifiques et constituent un ingrédient de base des modèles de phénomènes naturels. Ils furent introduits par Newton et Leibniz il y a 300 ans environ pour exprimer les lois de la dynamique qui sont utilisées de nos jours. Ce sont ces lois qui permettent de déterminer la position et la vitesse d'une particule à un instant donné à partir de la position et de la vitesse à l'instant précédent. Le mouvement de la particule est alors donné par le «déroulement» de la loi. Les processus à rétroaction peuvent être discrets ou continus. Les biologistes examinent volontiers l'évolution d'une population d'année en année par exemple, alors que les physiciens aiment décrire le mouvement d'une manière continue en utilisant des intervalles de temps infinitésimaux.

Une «machine à rétroaction» peut être simulée en exécutant un programme d'ordinateur

Pour désigner un processus à rétroaction, nous emploierons indifféremment les termes *itérateur* ou *système dynamique*, et pour illustrer différentes propriétés de ces systèmes, nous utiliserons une *machine à rétroaction*. Cette notion se réfère à une machine abstraite que l'on peut toutefois faire fonctionner en exécutant un programme d'ordinateur, en utilisant une calculatrice de poche ou même un crayon et du papier. Une telle machine comporte trois unités de stockage – entrée E, unité de contrôle UC et sortie S – et un processeur. Ces unités sont reliées entre elles (voir fig. 1). Une horloge cadence l'action de chaque unité et compte les cycles. L'exécution d'un cycle est parfois appelée une *itération*.

Au cours du processus, la même opération est effectuée durant chaque cycle.
Le résultat d'une itération devient le point de départ de la suivante

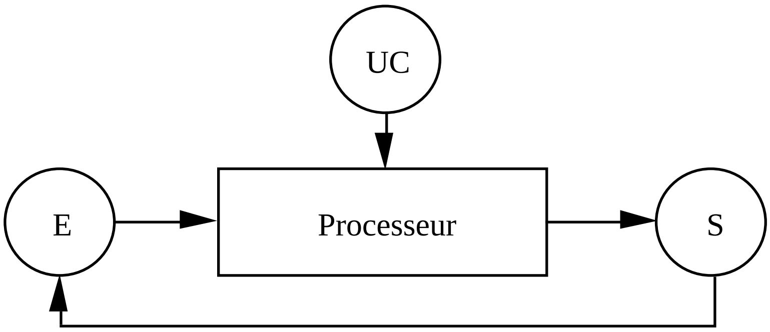

Fig. 1: Schéma d'une «machine à rétroaction». Cette machine comporte trois unités de stockage: entrée E, unité de contrôle UC et sortie S. Lorsque la machine fonctionne, l'information transite de l'entrée E vers le processeur, du processeur vers la sortie S, et de la sortie S vers l'entrée E.

On distingue deux types de cycles, les *cycles de préparation* et les *cycles d'exécution*. Chacun de ces cycles peut être décomposé en étapes élémentaires. Pour le premier:

- placer l'information dans l'unité d'entrée E
- placer l'information dans l'unité de contrôle UC
- transmettre le contenu de l'unité de contrôle UC dans le processeur.

Et pour le second:

- transmettre le contenu de l'unité d'entrée E et le placer dans le processeur
- calculer
- transmettre le résultat et le placer dans l'unité de sortie S
- transmettre le contenu de l'unité de sortie S et le placer dans l'unité d'entrée E.

Les Sumériens connaissaient et utilisaient déjà des processus à rétroaction

La tradition des processus à rétroaction remonte à plusieurs millénaires (voir ex. 4). Ces procédés, qui ont vu le jour en mathématiques, sont abondamment utilisés en sciences expérimentales pour résoudre numériquement des problèmes complexes.

Travaux pratiques

Pour se familiariser avec quelques définitions

Préliminaires

Un processus à rétroaction discret est caractérisé par une suite de nombres définis récursivement, c'est-à-dire par une règle reliant chaque nombre de la suite aux précédents. La suite 0, 1, 2, 3, ... par exemple peut être désignée par $A(k) = k$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$ La règle reliant les nombres s'écrit dans ce cas $A(n+1) = A(n)+1$. On donne d'habitude, pour caractériser un processus à rétroaction, le premier nombre de la suite ainsi que la règle. En itérant l'application de la règle, on obtient alors les nombres de la suite.

Si le résultat d'une itération ne dépend que du résultat de l'itération précédente, alors $A(n+1) = f(A(n))$ et on parle de *système dynamique discret du premier ordre*. Selon la nature de la fonction f, on aura un *système linéaire*, *affine* ou *non linéaire*. Si les coefficients de $A(n)$ dépendent de n, $A(n+1) = f(n, A(n))$ le système est appelé *non autonome*. Si le système revêt la forme $A(n+1) = f(A(n)) + g(n)$, il est dit *non homogène*. Si le résultat d'une itération dépend du résultat des m itérations précédentes, le système est dit d'ordre m.

Pour modéliser des phénomènes continus, on recourt à des *équations différentielles* qui établissent une relation entre une fonction $f(t)$ et ses dérivées successives $f'(t)$, $f''(t)$, ... Dans les systèmes continus, le temps t peut prendre n'importe quelle valeur réelle, alors que dans les systèmes discrets, le temps n ne prend que des valeurs entières. Il est possible d'obtenir une équation différentielle à partir d'un système dynamique discret.

Pour vérifier si les définitions sont assimilées

Exercice 1

Parmi les expressions suivantes, quelles sont celles qui représentent des processus à rétroaction? Indiquez la nature (linéaire, affine, non autonome, non homogène, non linéaire) et l'ordre de chaque système dynamique discret.

a) $A(n+3) = 2/A(n-1)$
b) $A(k) = A(k-1) + 1$
c) $A(n) = 4A(n) - 2$
d) $B(n) = 2A(n-1)$
e) $A(n+2) = A(n+1)/A(n)$
f) $A(n+5) = A(n+10) - 5$
g) $B(r+3) = 2B(r+1) - B(r-1)$
h) $A(n+5) = A(k) - A(n)$
i) $A(n+2) = A(n+1) + n^2 - 3$
j) $A(n+1) = (n+1)A(n)$

Pour mettre en œuvre un processus à rétroaction discret du premier ordre

Exercice 2

Calculez, d'année en année et pour une période de 12 ans, la taille d'une population d'insectes dont la croissance est donnée par le système dynamique discret suivant: $x(n+1) = rx(n)(1-x(n))$ en combinant les valeurs initiales $x(0)$ et les taux de reproduction r :

$x(0)$	:	0.2	0.4	0.6	0.8
r	:	1	2	3	4

Pour apprendre à exprimer une loi sous forme d'équations différentielles ou sous forme d'équations aux différences

Exercice 3

a) Exprimez, en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, la loi de la chute des corpssous forme d'équations différentielles.
b) Ecrivez cette loi sous forme d'équations aux différences finies.

Pour examiner les propriétés d'une «machine à rétroaction»

Exercice 4

Pour calculer la racine carrée d'un nombre a, les mathématiciens sumériens utilisaient le processus:

$$x(n+1) = 0.5(x(n) + a/x(n))$$

a) Construisez une «machine à rétroaction» permettant de mettre en œuvre ce processus.
b) Indiquez quelles sont les unités de stockage et en quoi consiste le cycle de préparation.
c) Combien faut-il effectuer d'itérations pour obtenir la racine carrée de 2 avec 10 décimales exactes si on pose $x_0 = 2$.

Prochaine réunion: mardi 11 octobre 1994 à 17 h.