Modélisation
Simulation

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 39

Mardi 11 avril 1995 à 17 h

Le Yin et le Yang

Bernard Vuilleumier

Les modèles de phénomènes naturels utilisent des fonctions continues et «lisses» comme matériau de construction

La plupart des modèles de phénomènes naturels utilisent des fonctions élémentaires comme matériau de construction. Ces fonctions – e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$, x^k – sont les plus «lisses» des fonctions continues, et ne présentent donc aucun changement brusque; avec elles, ce qui se produit en un point $x + \Delta x$ est pratiquement identique à ce qui se produit en x, si Δx est suffisamment petit. Et pourtant, un nombre important de phénomènes naturels présentent des discontinuités (différentiation cellulaire, flambage d'un poutre, turbulence, …). Comment pouvons-nous donc capturer de tels comportements discontinus dans des modèles mathématiques construits à l'aide de composantes aussi lisses? C'est une des questions que se pose la théorie générale des bifurcations et plus particulièrement la théorie des catastrophes.

Pourtant, un nombre important de phénomènes naturels présentent des discontinuités

Imaginons un modèle décrivant une trajectoire elliptique. La géométrie analytique nous apprend que l'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ fournit une ellipse dont les demi axes ont pour longueur a et b. Si nous faisons subir une rotation au système de référence, nous ne modifions ni a ni b mais l'ellipse se présente différemment et elle est décrite par une autre équation. Il est évident que ces deux courbes fermées du plan peuvent être superposées. Par conséquent, les deux descriptions contiennent exactement la même information. Les différences ne résultent que du choix de la description que nous en faisons. Les nombres a et b sont des propriétés intrinsèques de l'ellipse. Ils restent les mêmes dans les deux descriptions. De tels invariants représentent des propriétés du système et sont indépendants de la description utilisée.

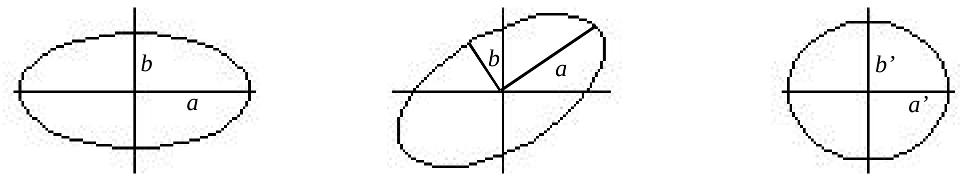

Fig. 1 : Trois ellipses «équivalentes». Les deux premières ont les mêmes propriétés intrinsèques (demi axes a et b) mais sont données dans deux systèmes d'axes différents. La troisième possède des propriétés intrinsèques différentes, mais elle peut être ramenée à la première par un changement de coordonnées.

La théorie des bifurcations cherche à expliquer les comportements discontinus

Si nous modifions les valeurs des paramètres ($a \to a'$, $b \to b'$), nous changeons les propriétés de l'ellipse. Si nous pouvons «neutraliser» cette modification des paramètres par un changement de coordonnées ($x \to x'$, $y \to y'$), nous considérerons les deux ellipses comme équivalentes. Mais cette «neutralisation» n'est pas toujours possible : lorsqu'un des paramètres a, b, a', b' s'annule, l'ellipse dégénère en une autre section conique qui ne peut plus être ramenée à une ellipse par un changement de coordonnées. Nous dirons qu'il se produit une *bifurcation*.

Aux points de bifurcation, le comportement d'un système change d'une manière radicale

Aux points de bifurcation, le comportement d'un système change d'une manière radicale et diffère du comportement adopté en tous les points voisins. La question qui surgit est la suivante: comment classer les différents comportements? En d'autres termes, comment subdiviser l'espace des paramètres pour que deux points a et a' n'appartiennent au même sous ensemble que s'ils donnent lieu au «même type» de comportement ? Les théoriciens des systèmes ont formalisé cette idée à l'aide du concept de «généricité»: une propriété est considérée comme générique si «presque tous» les systèmes la possèdent. Leur espoir est que les systèmes génériques permettront une classification utile. Le problème de la classification, souvent appelé «problème Yin-Yang» par les spécialistes, revient à ceci : il s'agit de trouver des systèmes assez simples pour être classés (Yin), mais suffisamment compliqués pour être génériques (Yang).

Pour obtenir une classification, il s'agit de trouver des systèmes assez simples pour être classés, mais suffisamment compliqués pour être génériques

Travaux pratiques

Pour préciser la notion «d'équivalence» en théorie des bifurcations

Exercice 1

a) Dessinez une ellipse de demi axes $a=2$ et $b=1$.
b) Faites subir une rotation de -30° aux axes du système de référence.
c) Donnez l'équation de l'ellipse dans ce nouveau système d'axes.
d) Construisez une deuxième ellipse de demi axes $a'=1.4$ et $b'=1.2$.
e) Etablissez «l'équivalence» de la première et de la deuxième ellipse.

Exercice 2

Soit la famille des fonctions à deux paramètres $f(x, a,b)=x^4+ax^2+bx$.
a) Trouvez l'ensemble de bifurcation de f.
b) Représentez cet ensemble dans le plan des paramètres (a, b)
c) Représentez les solutions de l'équation $\partial f/\partial x=0$ comme fonction de la variable x et des paramètres a et b.
d) Quelle relation existe-t-il entre ces deux dernières représentations?

Prochaine réunion: mardi 16 mai 1995 à 17 h.