Modélisation Simulation

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 46

Mardi 13 février 1996 à 17 h

Machines de Turing

Bernard Vuilleumier

La formulation précise et générale du concept d'algorithme date de notre siècle

En quoi consiste au juste un algorithme et quelles sont les opérations qui peuvent, en principe, être effectuées de manière algorithmique? C'est pour répondre à cette question qu'Alan Turing proposa, en 1935-36, une «machine» suffisamment simple pour que des théorèmes sur le type de fonctions qu'elle peut calculer puissent être prouvés, et assez puissante pour simuler n'importe quel ordinateur digital. Une machine de Turing comporte une *bande infinie* dans les deux sens, constituée de *cellules* de mémoire et un *alphabet fini* de symboles qui peuvent être lus et écrits par une *tête* sur les cellules. Les cellules contenant un symbole sont toujours en nombre fini. Il n'y a qu'une seule cellule active: c'est celle où se trouve la tête. La machine peut se trouver dans différents *états* qui sont en nombre fini. Chaque état est caractérisé par un nombre. Pour exécuter une *instruction*, une machine de Turing lit le symbole se trouvant sous la tête, modifie (ou non) le contenu de la cellule, laisse en place ou déplace la tête d'une cellule vers la gauche ou vers la droite et adopte (ou non) un nouvel état.

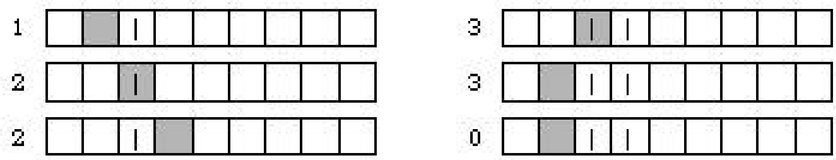


Fig. 1: Instructions exécutées par une machine de Turing comportant un alphabet à deux symboles (le blanc et la marque |) et quatre états. La tête de lecture (en grisé) se déplace et la machine passe successivement par les états 1, 2, 2, 3, 3 indiqués à gauche de la bande, avant de s'arrêter dans l'état 0.

L'emploi croissant de ce concept a fait émerger un nouveau paradigme: l'Univers serait un ordinateur qui calcule en utilisant les lois de la Nature comme software et les particules élémentaires comme hardware

L'emploi croissant de concepts informatiques dans diverses disciplines, l'usage de plus en plus fréquent de simulations numériques pour étudier les phénomènes naturels ainsi que la tendance à la mise en algorithmes des raisonnements scientifiques dans les systèmes experts pourraient laisser penser que tout est calculable. Pierre Lévy[1] parle à ce propos de l'émergence d'un *paradigme du calcul* qui, dans sa forme extrême s'énoncerait ainsi: l'Univers est un ordinateur qui calcule en utilisant les lois de la Nature comme software et les particules élémentaires comme hardware. Tout serait donc calculable dans l'Univers. Supposons un instant que le monde soit intrinsèquement mathématique. Si toutes les fonctions autres que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division n'étaient pas calculables, nous ne trouverions pas les mathématiques très efficaces pour le décrire. Le fait que les mathématiques sont extrêmement efficaces est équivalent au fait que de très nombreuses fonctions sont calculables. Mais Turing parvint à démontrer que certaines opérations mathématiques n'étaient pas algorithmiques et qu'elles ne pouvaient pas être effectuées à l'aide de sa machine (et par conséquent ni avec aucun ordinateur digital). La question cruciale est alors de savoir si ces opérations interviennent dans l'Univers. La réponse n'est pas encore claire, mais, si de telles fonctions devaient jouer un rôle essentiel dans la Nature, cela aurait des conséquences considérables. Si le cerveau par exemple fonctionnait en utilisant une quelconque opération non calculable, alors il serait impossible à tout jamais de rendre compte de son fonctionnement à l'aide de réseaux d'automates. D'une manière plus générale, l'apparition d'une opération non calculable dans la Nature signifierait que la description du phénomène où elle intervient ne pourra pas être améliorée par une suite répétitive d'étapes de calcul. Les problèmes non calculables ne se laissent pas appréhender par des algorithmes. Chaque étape dans la recherche d'une meilleure description requiert quelque chose de qualitativement nouveau. La technique calculatoire ne suffit plus, il faut autre chose.

Mais certaines opérations mathématiques ne sont pas algorithmiques et elles ne peuvent pas être effectuées à l'aide de l'ordinateur

La question cruciale est de savoir si des opérations de ce type interviennent dans l'Univers, ce qui aurait des conséquences considérables

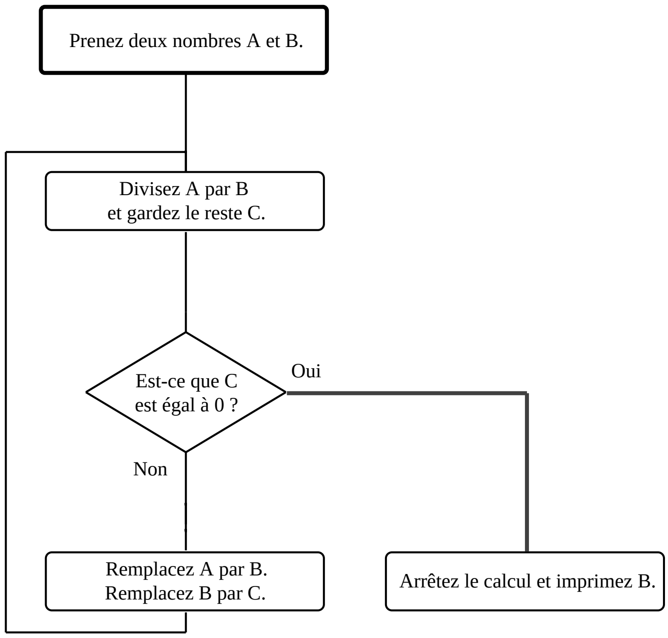
[1] Pierre Lévy, *La machine univers. Création, cognition et culture informatique.* Editions La Découverte, 1987.

Travaux pratiques

Mots clefs
Algorithme, machine de Turing, fonction caculable, paradigme du calcul.

Pour rendre hommage à ceux qui nous ont précédés

Exercice 1
L'organigramme ci-contre correspond à un algorithme qui date de la Grèce antique (c. 300 av. J. -C.). On l'appelle aujourd'hui «algorithme d'Euclide».
a) Appliquez successivement cet algorithme à plusieurs couples de nombres naturels {A, B} et essayez de trouver à quoi correspond le résultat.
b) Ecrivez un programme informatique correspondant à cet algorithme.



Pour illustrer différentes manières de définir une machine de Turing

Exercice 2
Le tableau ci-dessous spécifie une machine de Turing:

		Alphabet		
		blanc	a	b
Etats	1	aL2	bR	
	2	bR1		aL

Donnez la liste des instructions qui la définissent en les exprimant sous la forme:
Instruction[état, symbole, nouveau symbole, déplacement, nouvel état]

Pour solliciter – à propos d'algorithmes – des intuitions qui ne sont peut être pas algorithmiques!

Exercice 3
Donnez la liste des instructions des machines de Turing qui effectuent les opérations suivantes:
a) trouver le successeur de n'importe quel nombre ≥ 0;
b) additionner deux nombres > 0;
c) multiplier par 2 n'importe quel nombre ≥ 0;
d) calculer le plus grand diviseur commun de deux nombres > 0.

Prochaine réunion: mardi 12 mars 1996 à 17 h.