Lettre nº 1

Club MATH

Centre EAO du DIP
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 781 15 30

Responsable:
Raymond Morel

Mardi 22 janvier à 17 h.
Salle de conférences
du Collège Calvin

Algèbre et géométrie à l'aide de Mathematica

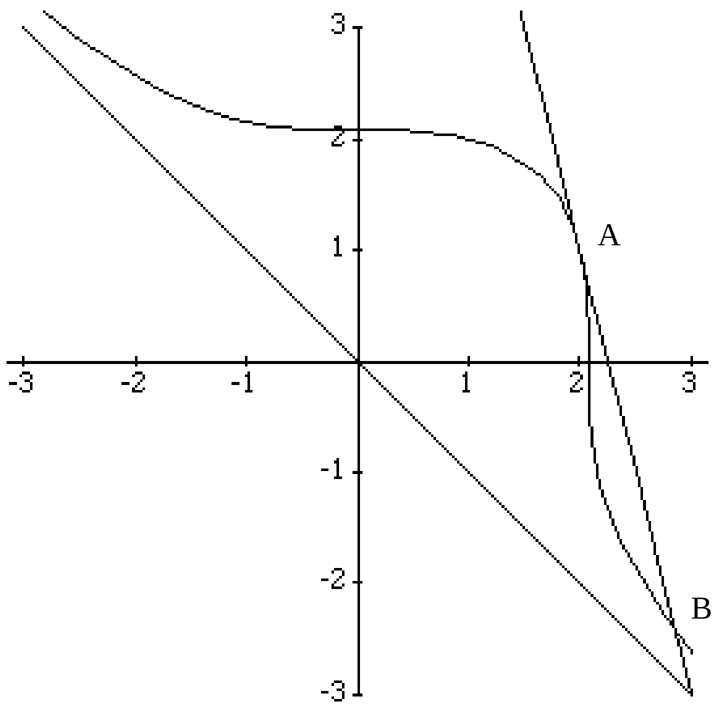
Présentation: Bernard Vuilleumier

Le problème

Quels sont les nombres rationnels positifs x et y qui vérifient l'équation $x^3+y^3 = 9$. Les solutions évidentes sont x=2, y=1 et x=1, y=2. Mais y en a-t-il d'autres ?

Au XVII^{e} siècle, Pierre de Fermat mit au point une méthode géométrique efficace pour résoudre cette équation difficile de l'arithmétique. L'équation $x^3+y^3 = 9$ n'a pas seulement une interprétation algébrique. Elle définit aussi une courbe du plan, à savoir l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $x^3+y^3 = 9$. Une droite quelconque d'équation y=ax+b coupe la courbe en, au plus, trois points distincts. Quand la droite est tan-

Si le point A est rationnel, le point B l'est aussi



L'idée de base de la méthode de Fermat

gente à la courbe, le point de contact compte double. La méthode de Fermat repose sur le fait que si une droite est tangente à la courbe en un point de coordonnées rationnelles, et si elle coupe la courbe en un autre point, ce dernier a aussi des coordonnées rationnelles.

Si on connait un point rationnel, on peut en trouver d'autres

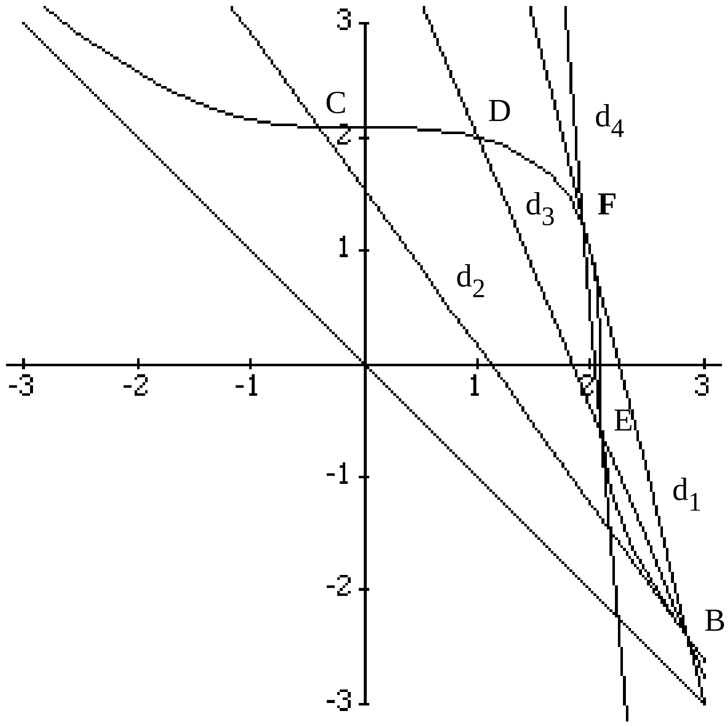
Les abscisses des points d'intersections s'obtiennent en remplaçant y par ax+b dans l'équation $x^3+y^3 = 9$. En résolvant l'équation obtenue par rapport à x et en additionnant les trois abscisses nous obtenons:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-3a^2b}{1 + a^3}$$

Si a, b, x_1 et x_2 sont rationnels, alors x_3 est aussi rationnel puisqu'il s'obtient comme somme, produit et quotient de nombres rationnels. L'abscisse x_3 du troisième point étant rationnelle, son ordonnée y_3 l'est aussi puisqu'elle est égale à $y_3=ax_3 +b$.

La construction géométrique

Considérons le point A(2;1) et traçons la tangente d_1 en A



Cherchons l'intersection B de d_1 avec la courbe. Ce premier point B ne convient pas car les solutions que nous cherchons doivent être positives. Traçons la tangente d_2 et cherchons l'intersection C de d_2 avec la courbe. Ce deuxième point ne convient pas non plus car son abscisse est négative. Construisons la droite d_3 qui relie le point B au point D(1;2) - autre solution évidente de l'équation - et cherchons l'intersection E de cette droite avec la courbe. Traçons la tangente à E. Les coordonnées F_x, F_y de l'intersection de la tangente d_4 avec la courbe sont toutes deux positives. Nous avons donc trouvé deux nombres rationnels positifs, F_x et F_y, qui satisfont l'équation $x^3+y^3 = 9$.

La solution du problème

$$F_x = \frac{676702467503}{348671682660} \qquad F_y = \frac{415280564497}{348671682660}$$

Nota bene

Les participants qui le souhaiteront recevront un listing complet et documenté de la résolution de ce problème à l'aide de Mathematica. Il sera en outre possible de copier le fichier correspondant.