Lettre nº 2

Club MATH

Centre EAO du DIP
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 781 15 30

Responsable:
Raymond Morel

Mercredi 13 février, 17 h
Salle de conférences
du Collège Calvin

Calculs et manipulations formels à l'aide de Mathematica

Présentation: Bernard Vuilleumier

La question

De nombreux systèmes stationnaires, tant physiques, chimiques que biologiques, peuvent, sous l'effet de petites perturbations, évoluer d'une manière inattendue. Comment, dès lors, savoir si un système se trouvant dans un état stationnaire "résistera" à une petite perturbation ?

Le système considéré

Considérons un système décrit par les équations suivantes:

$$\frac{dX}{dt} = A + X^2Y - BX - X$$
$$\frac{dY}{dt} = BX - X^2Y$$

Ce système admet la solution stationnaire non nulle:

L'état stationnaire est-il stable ?

$$X_0 = A$$
$$Y_0 = \frac{B}{A}$$

Mais cet état est-il stable ?

La méthode d'analyse

Pour étudier la stabilité d'un état, nous allons procéder de la manière suivante. Nous écrirons:

$$X = X_0 + x\, e^{\Omega t}$$
$$Y = Y_0 + y\, e^{\Omega t}$$

avec $\left|\frac{x}{X_0}\right| << 1$ et $\left|\frac{y}{Y_0}\right| << 1$

En substituant X et Y dans les équations du système par les expressions ci-dessus et en négligeant tous les termes d'ordre supérieur en x et y, nous obtenons un système d'équations linéaires et homogènes. En éliminant x et y de ces équations, nous obtenons une équation pour Ω, appelée équation de dispersion. Comme nous n'avons que deux inconnues, cette équation est du second ordre et sa forme explicite est:

L'équation de dispersion

$$\Omega^2 + (A^2 - B + 1)\Omega + A^2 = 0$$

Le critère de stabilité

La stabilité d'un état est associée au signe des parties réelles des racines de l'équation de dispersion. Si la partie réelle de chaque solution est négative, l'état sera stable. Pour le système que nous avons considéré, la partie réelle d'une des racines devient positive quand:

$$B > 1 + A^2$$

Ce système présente donc une instabilité. Pour les valeurs de B supérieures à la valeur critique, le système présente des oscillations caractérisées par un cycle limite: l'état stationnaire est donc instable et la même trajectoire périodique est obtenue à partir de différentes conditions initiales

Etat stationnaire instable et cycle limite

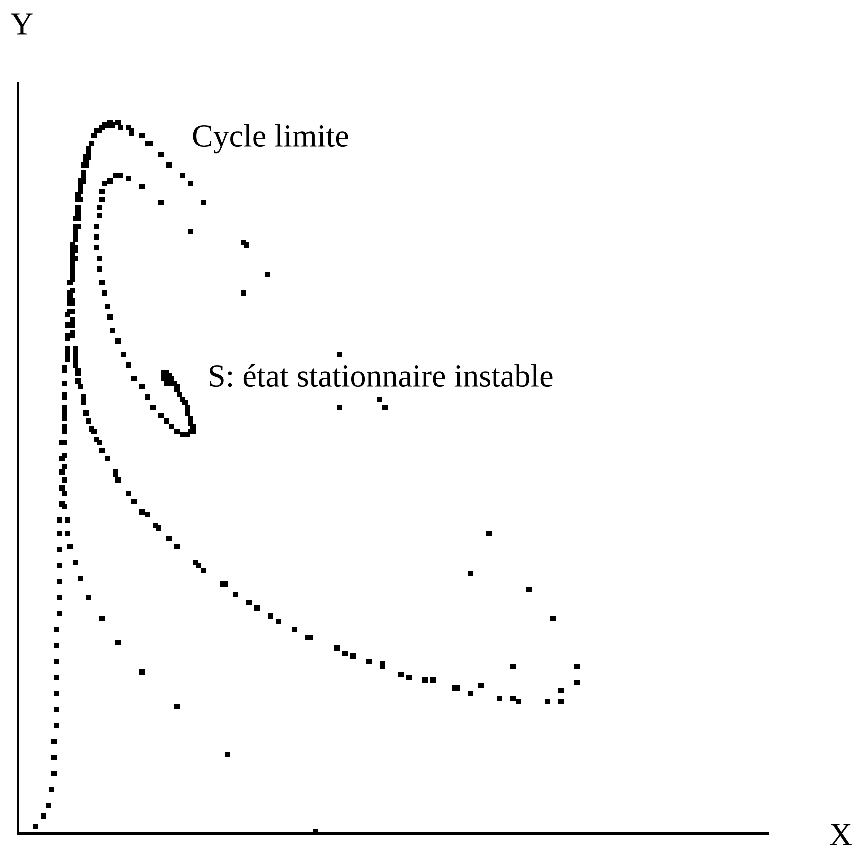

Fig. Si on perturbe un peu l'état stationnaire S, le système décrit alors dans l'espace X, Y, une trajectoire périodique. Le système tend vers la même trajectoire quelle que soit la position initiale (X_0;Y_0): nous avons affaire à un cycle limite.

Nota bene

Les participants qui le souhaiteront recevront un listing complet et documenté de la résolution de ce problème à l'aide de Mathematica. Il sera en outre possible de copier le fichier correspondant.