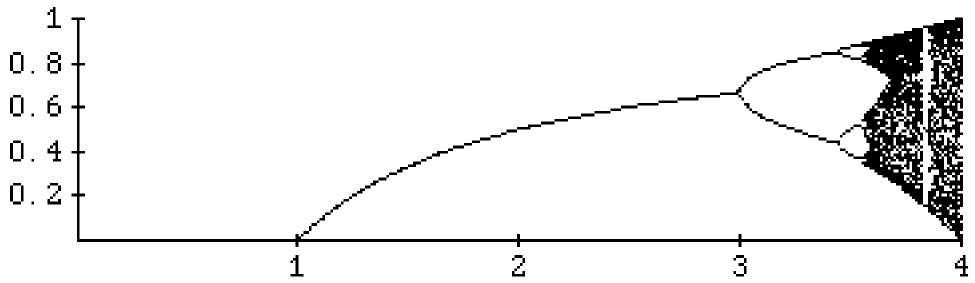
Club MATH

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 318.05.30
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 5



Lundi 23 septembre 1991 à 17 h.

Itération, carte et orbite

Présentation: Bernard Vuilleumier

La géométrie peut venir en aide à l'analyse

Les résultats des travaux sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos de ces vingt-cinq dernières années sont véritablement excitants: des systèmes réputés très difficiles à étudier d'un point de vue analytique peuvent être compris aisément à l'aide de méthodes géométriques qualitatives. On sait maintenant que le comportement chaotique et aléatoire des solutions de systèmes déterministes est inhérent à maints systèmes non linéaires, et la théorie géométrique développée ces dernières décennies rend compte élégamment des ces situations comme nous allons le voir sur l'exemple suivant.

Processus de croissance

Pour de nombreux processus de croissance, le nombre d'individus de la génération suivante x_{n+1} est une fonction linéaire de la génération présente x_n:

$$x_{n+1} = r\, x_n$$

où r est le paramètre de croissance. Si la croissance n'est pas limitée, elle suit une loi géométrique:

$$x_n = r^n\, x_0$$

et tend vers vers l'infini pour $r > 1$. Mais la croissance est souvent limitée par les ressources disponibles. En d'autres termes, plus la population x_n est grande, plus le taux de croissance r est petit. La façon la plus simple de modéliser le déclin du taux de croissance est de remplacer r par $r(x_{max} - x_n)$. Ainsi, lorsque x_n approche la limite x_{max}, le taux de croissance r tend vers 0. En normalisant la population à 1, on obtient la loi de croissance:

La croissance d'une population dans un milieu aux ressources limitées peut être chaotique

$$x_{n+1} = f(x_n) = r(1 - x_n)x_n$$

qui est appelée *carte quadratique*, ou encore, en raison de son utilisation en logistique et de sa forme parabolique, *carte logistique* ou *parabole logistique*. L'équation logistique a été introduite en 1845 par le sociologue et mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1848) pour modéliser la croissance de populations dans un milieu aux ressources limitées. L'emploi du terme *logistique* ne s'est toutefois généralisé qu'à partir de 1875.

Carte et orbite

La théorie des systèmes dynamiques cherche à comprendre le comportement asymptotique d'un processus itératif

L'objectif de la théorie des systèmes dynamiques est de comprendre le comportement asymptotique d'un processus itératif. Si le processus est décrit par une équation différentielle dont la variable indépendante est le temps, la théorie cherche à prédire le comportement des solutions de l'équation, soit dans le futur ($t \to \infty$), soit dans le passé ($t \to -\infty$). Si le processus est discret comme l'itération d'une fonction, la théorie espère décrire le comportement des points x, f(x), $f^2(x)$,..., $f^n(x)$, lorsque n devient grand. En termes plus prosaïques, la théorie des systèmes dynamiques souhaiterait savoir où vont les points et ce qu'ils font lorsqu'ils y sont. Les fonctions qui déterminent des systèmes dynamiques sont appelées *cartes* et la succession des positions d'un point *orbite*. L'ensemble des orbites d'une carte constitue son *portrait de phase.*

Méthode géométrique

Pour examiner la dynamique d'une carte, on dessine sur le même système d'axes le graphique de la fonction ainsi que la droite d'équation y = x (Fig. 1).

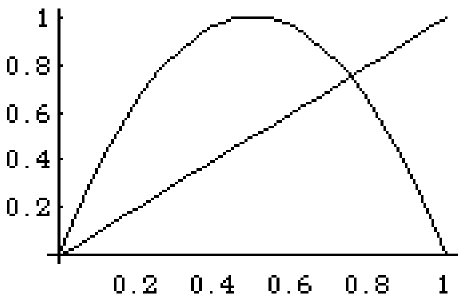


Fig. 1: r = 4; $y_1 = r(1-x)x$ et $y_2 = x$

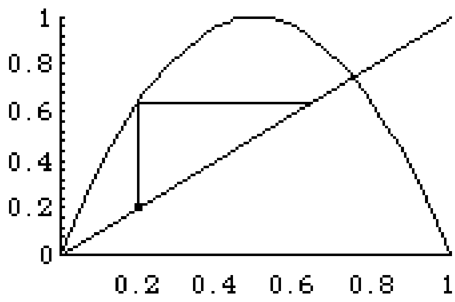


Fig. 2: r = 4; $x_0 = 0{,}2$; première itération

A partir d'une valeur initiale x_0 (0.2 dans notre exemple), on trace une verticale, de la droite y = x, jusqu'à $f(x_0)$, puis une horizontale jusqu'à la diagonale (Fig. 2). Cela donne la première image de x_0. En répétant l'opération, on obtient l'orbite de x_0 sur la droite y = x (Fig. 3). En appliquant ce procédé pour différents points de départ, on construit le portrait de phase de la carte.

La carte logistique est le paradigme de la théorie du chaos

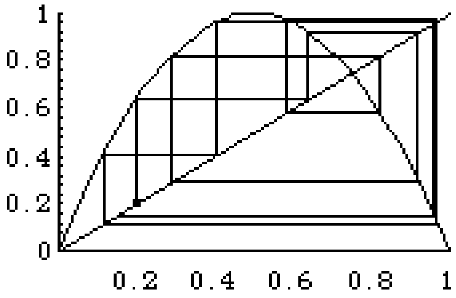


Fig. 3: r = 4; $x_0 = 0{,}2$; 10 premières itérations

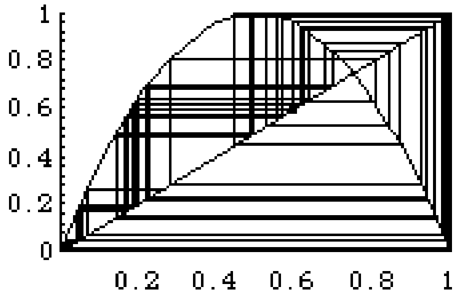


Fig. 4: r = 4; orbite de $x_0 = 0{,}2$ pour $200 \leq n \leq 250$

La carte logistique revêt une importance particulière en dynamique des systèmes car elle rend compte du caractère universel de la transition vers le chaos par doublement de période.

Prochaine réunion: lundi 4 novembre 1991 à 17 h.