Club MATH

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 318.05.30
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 9

Lundi 3 février 1992 à 17 h.

Les curiosités tues de la méthode de Newton

Présentation: Bernard Vuilleumier

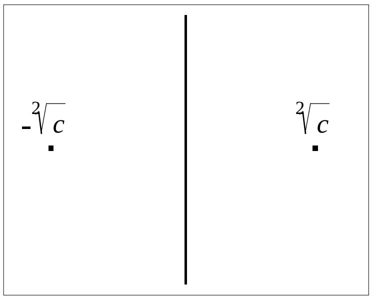
La méthode de Newton est souvent présentée de manière incomplète

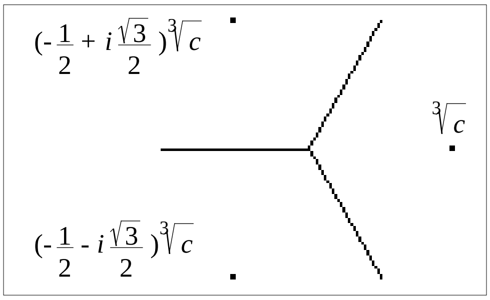
La méthode de Newton est une des principales techniques numériques pour trouver les solutions d'équations non linéaires. La théorie de cette méthode est habituellement présentée de la manière suivante: on démontre d'abord la convergence du procédé puis on s'intéresse ensuite à la "vitesse" de convergence. L'image que l'on retient d'une présentation de ce type est incomplète car elle n'inclut aucune des questions très intéressantes et très profondes liées à la méthode de Newton. Arthur Cayley s'est intéressé à ces questions dès 1879. Dans un article d'une page intitulé: The Newton-Fourier Imaginary Problem[1], il propose d'étudier la méthode globalement. Le problème est de trouver différentes régions du plan de manière que les points d'une région - considérés comme valeurs initiales - convergent vers une racine, ceux d'une autre région vers une autre racine, etc. Cayley remarque que *"la solution est aisée et élégante dans le cas d'une équation quadratique, mais le cas de l'équation cubique présente des difficultés considérables"*.

Le problème des bassins d'attraction est rarement évoqué

D'un point de vue numérique, la méthode de Newton est toujours comprise comme une méthode locale car on suppose que la valeur initiale est proche d'une des racines de l'équation. Cayley en revanche cherche à comprendre globalement le problème en déterminant les *bassins d'attraction* des racines. Il démontre que l'équation quadratique $p(x) = x^2 - c$, à laquelle peut se ramener tout polynôme du deuxième degré, possède deux bassins d'attraction séparés par la médiatrice du segment joignant les racines $\pm\sqrt{c}$

Les bassins de l'équation quadratique sont situés de part et d'autre de la médiatrice du segment reliant les deux racines $\pm\sqrt{c}$





Les bassins d'attraction de l'équation quadratique $x^2 - c = 0$ sont les deux demi-plans séparés par la médiatrice du segment joignant les racines $\pm\sqrt{c}$ (à gauche). Mais attention, les bassins d'attraction de l'équation cubique $x^3 - c = 0$ ne sont pas les trois régions du plan représentées à droite !

[1] Cayley, A. (1879) The Newton-Fourier Imaginary Problem. *Amer. J. Math.* II, 97.

La frontière des bassins d'attraction de l'équation quadratique est simple, mais celle de l'équation cubique est très compliquée

Pour l'équation quadratique, la *frontière* entre les bassins d'attraction est une droite: c'est la médiatrice du segment reliant les deux racines de l'équation. Pour l'équation cubique, cette frontière est extrêmement compliquée. Chaque point de la frontière est contigu aux trois bassins. Si on colorie les bassins d'attraction en trois couleurs différentes, chaque point de la frontière sera donc en contact avec les trois couleurs !

Ces aspects de la méthode de Newton sont intimement liés à la théorie des systèmes dynamiques

Le problème des bassins d'attraction permet d'illustrer un aspect typique de la théorie des systèmes dynamiques. La méthode de Newton, parce qu'elle permet - à partir d'une estimation initiale et par un processus itératif - de calculer les racines approchées de l'équation $f(x) = 0$, peut être assimilée à un processus dynamique dont on cherche à connaître l'état final à partir d'une valeur initiale. Pour l'équation cubique $x^3 - c = 0$, cet état final est connu depuis longtemps: c'est l'ensemble des solutions. Ce qui est moins connu en revanche, c'est que les bassins d'attraction associés à chacune de ces solutions peuvent être extrêmement imbriqués et que la racine obtenue par la méthode de Newton peut dépendre d'une manière très compliquée de l'estimation initiale.

Travaux pratiques

1. Trouvez l'équation de la droite:
   a) de pente m passant par le point P
   b) passant par les points P_1 et P_2
2. Etablissez que la méthode de Newton est équivalente au processus itératif:
   $x_{k+1} = x_k - p(x_k)/p'(x_k)$, $k = 0, 1, ...$
3. Créez une animation illustrant le processus itératif de l'exercice 2.
4. Montrez que si $q(x) = ax^2 + 2bx + d$ est un polynôme général du deuxième degré, alors $q(x)$ est équivalent à l'équation quadratique $p(x) = x^2 - c$ par le changement de coordonnées $\Phi(x) = ax + b$ avec $c = b^2 - b - ad$ i.e.
   $q(x) = \Phi^{-1} \circ p \circ \Phi(x)$
5. Essayez, pour l'équation $z^3 = 1$ et pour une portion du plan, de colorier:

- en rouge les points initiaux qui convergent vers 1 lorsqu'on résoud l'équation par la méthode de Newton
- en bleu ceux qui convergent vers $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- en vert ceux qui convergent vers $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Prochaine réunion: lundi 2 mars 1992 à 17 h.