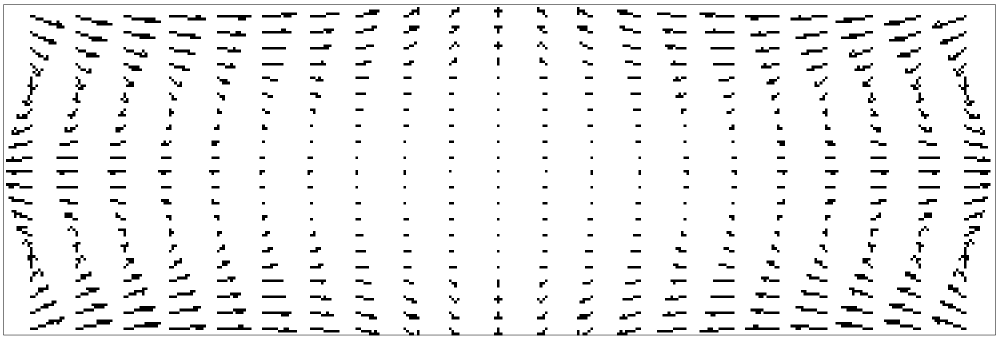
Club MATH

Centre informatique pédagogique (CIP)
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 318.05.30
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 11



La notion de champ joue un rôle très important en sciences. Tout ce qui assigne une valeur à un point de l'espace donne lieu à un champ: champ de températures, champ de pressions, champ de vitesses et d'accélérations par exemple. Cette notion, qui a permis la synthèse de l'électromagnétisme et de l'optique, a été élaborée au cours du XIX^{e} siècle pour rendre compte des forces électriques et magnétiques exercées sur un corps infinitésimal. Mathématiquement, un champ peut être défini à partir d'une équation différentielle ordinaire: c'est l'ensemble de ses solutions (lignes de champ). Si la grandeur associée à un point de l'espace est un nombre, comme la température ou la pression, on parle de champ scalaire. Si c'est un vecteur, comme la vitesse ou la force, il s'agit de champ vectoriel. Un champ de vecteurs peut être visualisé en dessinant, en différents points de l'espace, des flèches tangentes aux lignes de champ et de longueur proportionnelle à l'intensité de la grandeur en ce point.

Tout ce qui assigne une valeur à un point de l'espace donne lieu à un champ

Mathématiquement, un champ peut être défini à partir d'une équation différentielle ou d'une fonction du plan

Il est possible de construire un champ de vecteurs à l'aide d'une fonction du plan à valeurs réelles. Considérons la fonction $f(x, y)$. Nous pouvons définir, en chaque point du plan, les composantes d'un vecteur par $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$. Nous obtenons ainsi le *champ de gradients* de la fonction $f(x, y)$. Si la fonction $f(x, y)$ donne l'altitude des lieux repérés sur une carte, le champ de gradients (voir p. suiv.) sera perpendiculaire aux lignes de niveau.

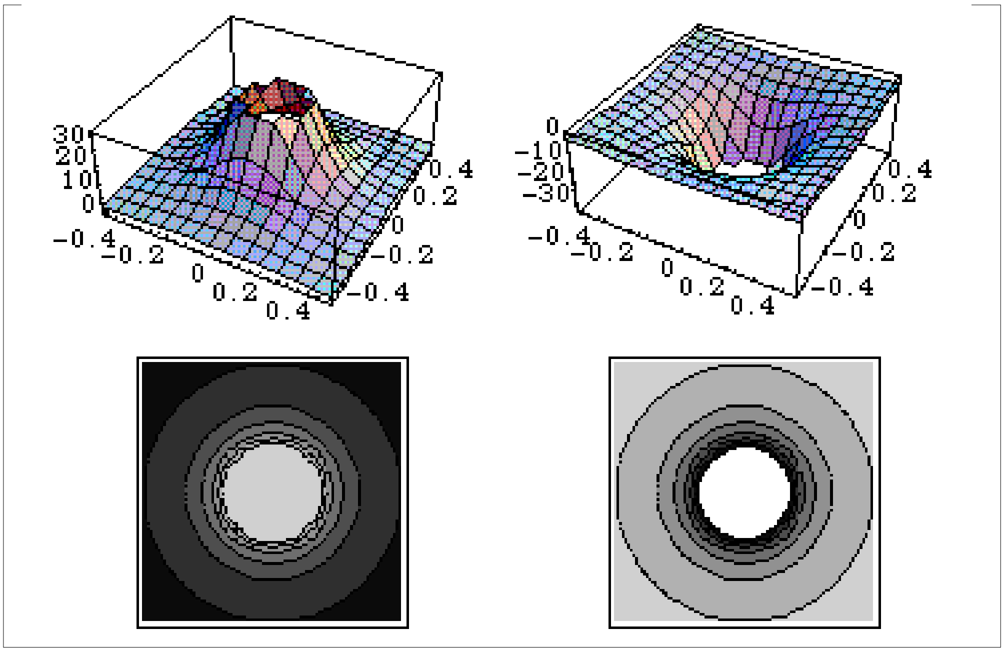
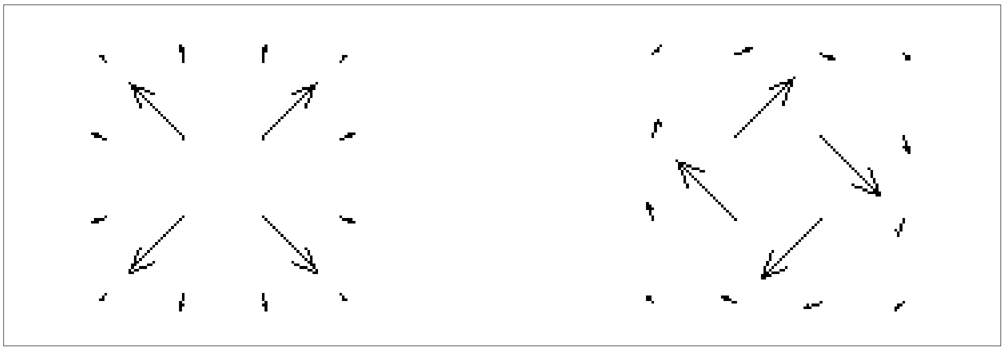


Figure: deux fonctions du plan (1ère ligne) et courbes de niveau correspondantes (2e ligne)

Le champ de gradients obtenu à partir d'une fonction du plan est perpendiculaire aux lignes de niveau

Si nous définissons les composantes d'un vecteur par $\partial f/\partial y$ et $-\partial f/\partial x$, nous obtenons le *champ hamiltonien* de la fonction $f(x, y)$. Si la fonction représente l'hamiltonien d'un système mécanique, le champ hamiltonien donne les trajectoires dans l'espace des phases. Le champ de gradients et le champ hamiltonien d'une même fonction sont perpendiculaires.

Figure: le champ de gradients et le champ hamiltonien d'une fonction sont perpendiculaires entre eux



Il est possible de représenter une fonction à variables et à valeurs complexes à l'aide d'un champ vectoriel

Les champs vectoriels peuvent aussi être utilisés pour représenter des fonctions à variables et valeurs complexes $z = f(x + iy)$. Les parties réelles et complexes de l'argument de la fonction fournissent les coordonnées d'un point du plan et la valeur complexe z de la fonction en ce point donne les composantes du vecteur associé à ce point. Dans la représentation de Polya, la longueur du vecteur est donnée par $\mathrm{Log}(\sqrt{z\bar{z}} + 1)$ et c'est l'opposé de la partie imaginaire qui est utilisé.

Travaux pratiques

1. Définissez un champ de forces centrales en $1/r^2$:

a) attractif

b) répulsif.

2. Dessinez le champ de forces de l'exercice 1 pour $-0.5 \le x \le 0.5$ et $-0.5 \le y \le 0.5$.

3. Dessinez le champ de gradients des fonctions scalaires:

a) $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = -1/(x^2 + y^2)$.

4. Définissez le potentiel de gravitation créé par une masse de rayon r et centrée en x = c.

   Dessinez le potentiel pour:

a) r = 0.05, c = - 0.2

b) r = 0.05, c = 0

c) r = 0.05, c = 0.2.

   Dessinez les lignes de niveau des surfaces obtenues.

5. Vérifiez que le champ de forces dérivant du potentiel de gravitation de l'exercice 4 est un champ de forces centrales en $1/r^2$.

6. Construisez le champ de gradients et le champ hamiltonien d'un potentiel de gravitation en $1/r$.