Club MATH

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 318.05.30
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 12

Lundi 4 mai 1992 à 17 h.

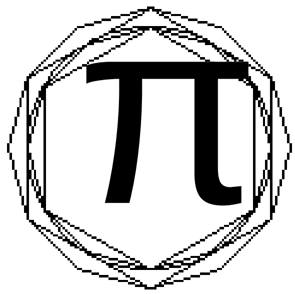
Utiliser l'attrait du mystère pour enseigner les limites

Présentation: Bernard Vuilleumier

Les limites ont toujours été entourées d'un certain mystère. Elles peuvent conduire à de nouveaux "objets" et caractériser des propriétés étonnantes. Leur étude a joué - et peut encore jouer - un rôle stimulant dans l'apprentissage des mathématiques. Elle a donné lieu à des découvertes qui comptent parmi les plus belles de l'humanité. Lorsque les Sumériens estiment $\sqrt{2}$ par un ingénieux procédé numérique (qui sera redécouvert par Newton) ou lorsqu'Archimède calcule π en approchant le cercle par une séquence de polygones, les uns et les autres sont à la fois intrigués et séduits par le côté mystérieux de ces entités.

L'étude des limites a conduit à des découvertes qui comptent parmi les plus belles des mathématiques

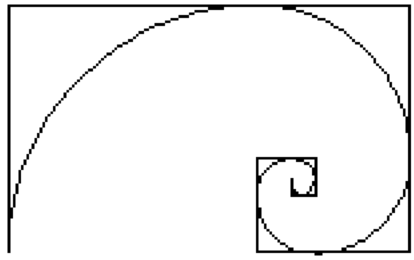
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}}}}$$

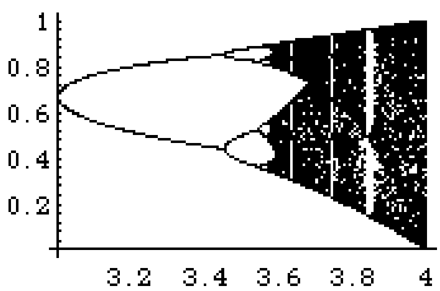


La relation entre la suite de Fibonacci et le nombre d'or recèle aussi sa part de mystère. Elle a inspiré, des siècles durant, artistes et architectes. Plus récemment, on a découvert que de nombreux phénomènes biologiques et physiques présentaient une propriété commune caractérisée par deux nombres universels - les constantes de Feigenbaum - qui sont des limites. Ces deux nombres permettent de rendre compte de toutes les évolutions conduisant de l'ordre au chaos par bifurcations successives. Ils sont définis par un procédé identique à celui utilisé pour obtenir le nombre d'or à partir de la suite de Fibonacci !

Le nombre d'or, qui peut se définir à l'aide d'une limite, a inspiré, des siècles durant, artistes et architectes

L'évolution de nombreux processus biologiques et physiques est caractérisée par deux limites: les constantes de Feigenbaum





Exercices suggérés

1. Le développement en *fraction continue* d'un nombre réel x est une représentation de la forme:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}}$$

De tous les nombres irrationnels, c'est le nombre d'or qui a le développement en fraction continue le plus simple

Montrons, à l'aide d'un exemple, comment cette décomposition s'obtient:

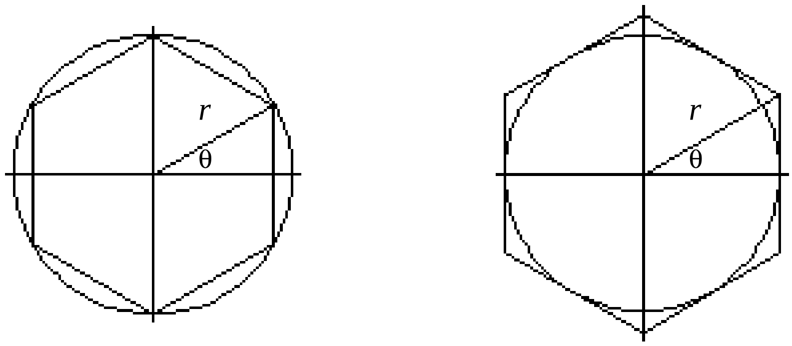
$$\frac{57}{17} = 3 + \frac{6}{17} = 3 + \cfrac{1}{\frac{17}{6}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \frac{5}{6}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\frac{6}{5}}} = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

Les entiers a_i sont appelés *quotients partiels*. Les nombres rationnels ont un nombre fini de quotients partiels alors que les nombres irrationnels ont un développement en fraction continue infini.

Exprimez $\sqrt{2}$ ainsi que le nombre d'or à l'aide de fractions continues. Donnez une approximation de chacun de ces nombres en calculant la valeur de leurs développements lorsque ceux-ci comportent 10, 100, 1000 quotients partiels. Calculez l'erreur commise dans chaque cas.

2. La méthode d'Archimède utilise, pour déterminer π, un cercle de rayon r et des polygones réguliers inscrits et circonscrits. Si l'on commence avec un hexagone inscrit (n = 6), on remarque que l'angle θ couvert par un demi-côté vaut $\pi/6$. La longueur d'un côté de l'hexagone inscrit vaut donc $2r\sin\theta$ et la longueur d'un côté de l'hexagone circonscrit $2r\tan\theta$.

On ne sait pas exactement comment Archimède s'y prenait pour calculer le sinus et la tangente d'un angle



En 1610, Ludolph von Ceulen (1536-1610) parvint à déterminer 35 décimales de π en utilisant des polygones à 2^{62} sommets !

Comme la longueur du cercle vaut $2\pi r$, on peut écrire:

$$2nr\sin\theta < 2\pi r < 2nr\tan\theta$$

où n est le nombre de côtés du polygone. En divisant par $2r$ à gauche et à droite, on obtient une minoration et une majoration de la valeur de π:

$$n\sin\theta < \pi < n\tan\theta$$

Illustrez et utilisez la méthode d'Archimède avec des polygones à 6, 12 et 24 côtés. Quelles valeurs approchées de π obtenez-vous ?

3. Construisez une spirale d'or en partant d'un rectangle de côtés a_1 et $a_1 + a_2$ avec $a_1 = 1$ et $a_2 = 2/(1 + \sqrt{5})$ (voir figure au recto).

Prochaine réunion: lundi 1er juin 1992 à 17 h