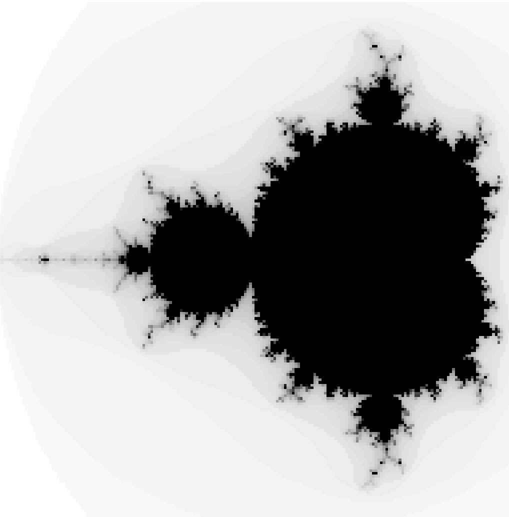
Club MATH

Centre informatique pédagogique (CIP)
Case Postale 172
1211 GENEVE 3
Tél. (022) 318.05.30
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 21



Lundi 5 avril 1993
à 16 h 30

L'ensemble de Mandelbrot

Bernard Vuilleumier

L'ensemble de Mandelbrot est sans aucun doute l'objet le plus populaire des mathématiques contemporaines. C'est peut être aussi l'objet le plus complexe qui ait été vu

Lorsqu'on itère une fonction, on obtient des valeurs qui peuvent converger vers un point fixe, présenter un cycle ou diverger vers l'infini

L'ensemble de Mandelbrot joue pour le mathématicien le même rôle qu'une carte pour le géographe

Les géographes, lorsqu'ils construisent des cartes, font usage de couleurs pour mettre en évidence des zones aux propriétés communes. Les régions de même altitude par exemple auront la même couleur. L'ensemble de Mandelbrot joue, pour le mathématicien, le même rôle qu'une carte pour le géographe. Il lui permet de distinguer différents comportements des fonctions quadratiques à un paramètre $Q_c(z)=z^2+c$ lorsqu'elles sont itérées. Itérer une fonction, c'est calculer, à partir d'une valeur initiale z_0, une succession de valeurs $z_1, z_2, ... z_n$. En partant de $z_0=0$ par exemple, on obtient, pour la famille des fonctions quadratiques, $z_1=z_0^2+c=c$, $z_2=z_1^2+c=c^2+c$, etc. Si la variable z et le paramètre c sont réels, la suite $z_1, z_2, ... z_n$ correspond à des points de la droite $y=z$. Si z et c sont complexes, on obtient des points du plan de Gauss en itérant la fonction.

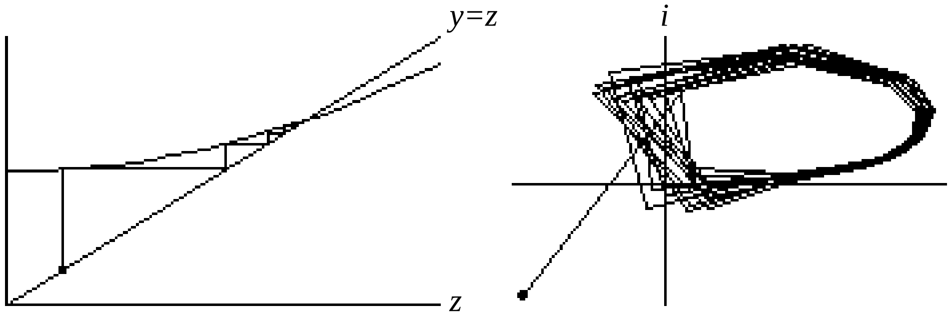


Fig. 1. En itérant une fonction quadratique à un paramètre $Q_c(z)=z^2+c$ on obtient: a) des points de la droite $y=z$ si z et c sont réels; b) des points du plan si z et c sont complexes.

La suite $z_1, z_2, ... z_n$, appelée orbite, peut converger vers un point fixe, présenter un cycle ou diverger. L'ensemble de Mandelbrot donne les valeurs du paramètre c pour lesquelles le module de z_n reste borné lorsqu'on itère l'expression $z_n=z_{n-1}^2+c$ en partant de $z_0=0$. A chaque point noir de la figure représentant l'ensemble de Mandelbrot correspond un nombre complexe c pour lequel les valeurs z_n obtenues par itération restent donc bornées. Une fois la valeur du paramètre c fixée, on peut itérer l'expression pour différentes valeurs initiales z_0. Les valeurs initiales pour lesquelles l'orbite reste alors bornée forment un ensemble de Julia. L'ensemble de Mandelbrot permet de classer les ensembles de Julia en deux catégories: les ensembles connectés et les ensembles disconnectés. Si le paramètre *c* appartient à l'ensemble de Mandelbrot, l'ensemble de Julia correspondant est connecté; sinon il est disconnecté.

Dans un ensemble connecté, tous les points noirs sont contigus

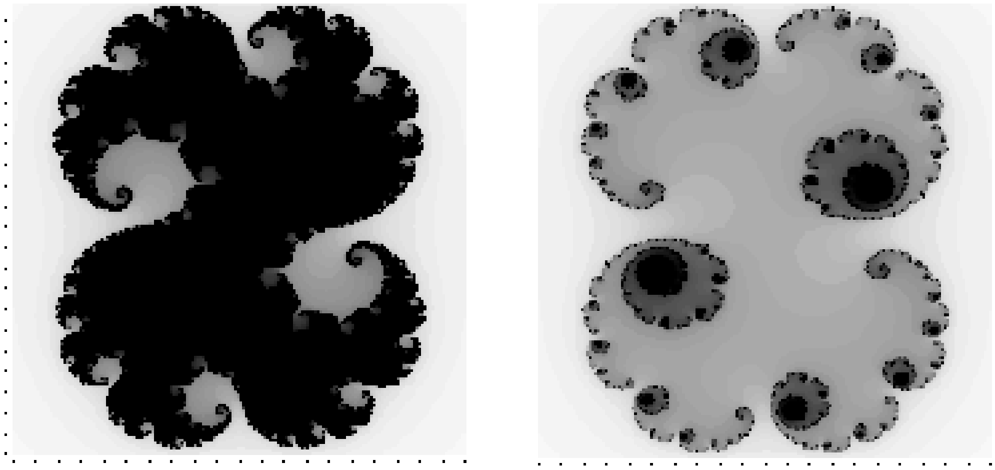


Fig 2. a) Ensemble de Julia connecté. b) Ensemble de Julia disconnecté.

L'ensemble de Mandelbrot entretient aussi d'étroites relations avec le diagramme de bifurcation des fonctions quadratiques à un paramètre (voir ex. 5)

Travaux pratiques

1. Ecrire un programme permettant d'obtenir une représentation de l'ensemble de Mandelbrot.

2. Ecrire un programme permettant d'obtenir les ensembles de Julia associés à l'ensemble de Mandelbrot.

3. Visualiser un ensemble de Julia:

a) pour une valeur de *c* appartenant à l'ensemble de Mandelbrot

b) pour une valeur de *c* n'appartenant pas à l'ensemble de Mandelbrot.

4. Quelles transformations géométriques faut-il faire subir à la parabole $y=rx(1-x)$ pour obtenir la parabole $y=x^2+c$

5. Etablir le diagramme de bifurcation de $y=x^2+c$, où $c=r/2-r^2/4$ avec $0 \leq r \leq 4$. Quelle relation ce diagramme entretient-il avec l'ensemble de Mandelbrot ?

Prochaine réunion: lundi 3 mai 1993 à 17 h.