Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 172
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 24

Lundi 4 octobre 1993 à 17 h

Continuité et monotonie

Bernard Vuilleumier*

Les élèves considèrent souvent les fonctions continues comme nécessairement différentiables

Pour le sens commun, la continuité entraîne la monotonie. Si vous parlez à vos élèves d'une fonction $f(x)$ continue en $x=a$ et en $x=b$ ainsi que de $x=a$ à $x=b$, ils croiront certainement qu'il est alors possible de trouver, pour a ou pour b ou pour n'importe quelle valeur de x située entre a et b, un intervalle ω suffisamment petit pour que, entre a et $a+\omega$, ou entre b et $b-\omega$, ou entre x et $x \pm \omega$, $f(x)$ ne fasse que l'une des deux choses suivantes: croître constamment ou décroître constamment. Cette intuition est très tenace. Les plus grands s'y sont d'ailleurs laissés prendre: Cauchy (1789-1857) n'a-t-il pas cru presque toute sa vie qu'une fonction continue était nécessairement différentiable!

En 1834, Bolzano, dans sa *Théorie des fonctions,* sépare le concept de continuité de celui de dérivabilité. Quarante ans avant Weierstrass, il construit une fonction d'une variable réelle, continue sur un intervalle fermé, qui n'a de dérivée en aucun point de cet intervalle. Cette fonction est définie comme limite d'une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$. Ces fonctions sont représentées chacune par une ligne polygonale construite à partir de la première fonction $f_0(x)$ à l'aide d'une opération fondamentale. Cette opération permet de construire f_n à partir de f_{n-1} de la manière suivante: soit $f_0(x)$ donnée par le segment PQ. Soit M le point milieu de PQ. Subdivisons les segments PM et MQ en quatre parts égales pour obtenir les points P_1, P_2, P_3, et Q_1, Q_2, Q_3. Soit P_3' le symétrique de P_3 par rapport à l'horizontale passant par M, et Q_3' le symétrique de Q_3 par rapport à l'horizontale passant par Q. La ligne brisée $PP_3'MQ_3'Q$ constitue $f_1(x)$.

On peut bien sûr leur dire que ce n'est pas le cas, mais il est certainement plus profitable de leur faire construire une fonction continue sur un intervalle et différentiable nulle part

Fig. 1: La fonction de Bolzano est la limite d'une suite de fonctions $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...\}$. Elle est continue mais différentiable nulle part. De gauche à droite: $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$.

* Je remercie ma collègue Janie Bugnion qui m'a donné l'idée de cette lettre et qui m'a fourni des informations utiles pour préparer les travaux pratiques.

Travaux pratiques

1. Exprimer littéralement les coordonnées des sommets de la ligne polygonale obtenue lorsqu'on applique l'opération fondamentale au segment donné par les points de coordonnées (a, A) et (b, B).

2. Appliquer l'opération fondamentale au segment défini par les points (0, 0) et (1, 1). Donner les coordonnées des points obtenus et dessiner la ligne polygonale qui les relie. Combien de sommets cette ligne comporte-t-elle ?

3. En appliquant *n* fois l'opération fondamentale, on obtient la $n^{\text{ième}}$ ligne polygonale. Etablir une relation donnant le nombre de sommets de la $n^{\text{ième}}$ ligne en fonction du nombre de sommets de la $(n\text{-}1)^{\text{ème}}$ ligne.

4. Trouver l'expression permettant d'obtenir directement le nombre de sommets de la $n^{\text{ième}}$ ligne (sans connaître le nombre de sommets de la $(n\text{-}1)^{\text{ème}}$).

5. Définir une fonction récurrente permettant d'appliquer un nombre arbitraire de fois l'opération fondamentale.

6. Construire une expression permettant de visualiser la $n^{\text{ième}}$ fonction de la suite $\{f_n(x)\}$.

Prochaine réunion: lundi 1^er^ novembre 1993 à 17h.