Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 172
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 26

Lundi 6 décembre 1993 à 17 h

Ajustement de courbes à des points

Bernard Vuilleumier

Mathématiciens, expérimentateurs et graphistes sont concernés par le problème de l'ajustement de courbes à des points

Selon la technique utilisée, la courbe passe par tous les points ou n'interpole qu'un sous ensemble des points et utilise les autres comme points de commande

Un point de commande joue le rôle d'un «pôle». Lorsqu'on le déplace, il «attire» la courbe qui se déforme continûment

Faire passer une courbe par des points est un problème qui ne concerne pas que les mathématiciens. Les expérimentateurs cherchent eux aussi très souvent, à partir de points de mesure, à obtenir une courbe qui «passe au mieux» par ces points. Les graphistes quant à eux sont intéressés par le dessin de courbes dans le plan.

La plupart des méthodes d'ajustement de courbes à des points supposent que la correspondance est de type un à un, c'est-à-dire qu'à chaque valeur de x, ne correspond qu'une seule valeur de y. On parle alors de «fit». Mais dans certains cas, on souhaite trouver une courbe du plan. Le cas général est un problème difficile et on recourt souvent à un «ajustement par morceaux». Ces morceaux sont appelés «splines».

L'idée de base de l'ajustement d'une courbe à des points est, dans le cas d'un «fit», de considérer une liste de fonctions et d'essayer de trouver une combinaison linéaire de ces fonctions qui s'approche aussi bien que possible des points. Pour un «ajustement par morceaux», on utilise des polynômes cubiques ou des courbes de Bézier. Dans un tel ajustement, les morceaux sont raccordés de telle manière qu'à chaque raccord, les extrémités jointives aient la même direction. Cela évite l'apparition de «pics» sur la courbe. La deuxième dérivée des morceaux s'annule donc aux raccords et, de ce fait, la courbe obtenue est continûment dérivable.

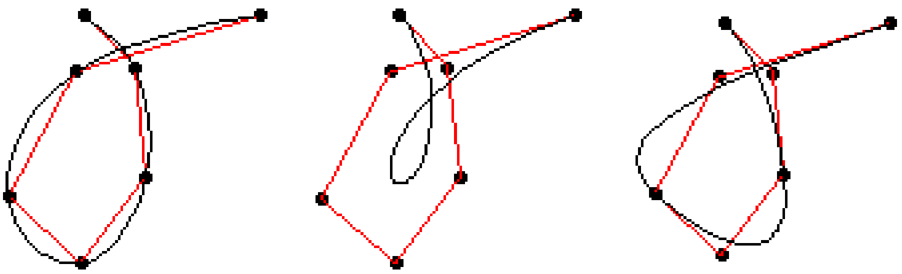

Fig. 1 : Ajustement de «morceaux de courbes» à des points : à gauche avec des polynômes cubiques; au centre avec une courbe de Bézier et à droite avec une courbe de Bézier composée. La courbe obtenue avec des polynômes cubiques passe par tous les points. La courbe de Bézier ne passe que par les points extrêmes (point initial et point final de la liste des points). Les autres points jouent le rôle de «pôles» et «attirent» la courbe; ce sont les points de commande. La courbe de Bézier composée alterne les points interpolés et les points de commande.

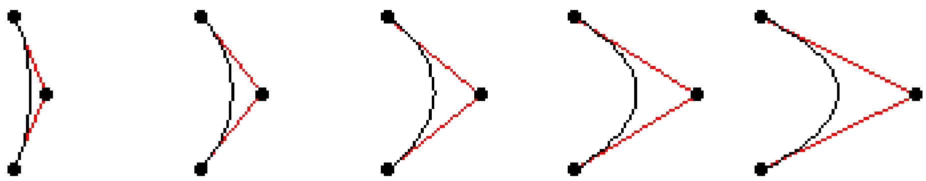

Fig. 2 : Courbe de Bézier définie à l'aide de trois points. La courbe passe par les points extrêmes. Le point médian est un point de commande. En le déplaçant, on peut déformer continûment la courbe.

Travaux pratiques

Exercice 1
a) Ajustez une fonction aux points donnés ci-dessous:
• à l'aide d'une combinaison linéaire de fontions de degré 0, 1 et 3;
• à l'aide d'une combinaison linéaire de fontions de degré 1, 2 et 3;
• à l'aide d'une combinaison linéaire de fontions de degré 0, 1, 2 et 3.
b) Quel est le résultat qui fournit l'ajustement de meilleure qualité ?
c) Un expérimentateur obtient le point de mesure supplémentaire suivant: {10, 9.995}. La courbe fournissant le meilleur ajustement passe-t-elle à proximité de ce point ? Commentez le résultat.
Coordonnées des points:
{{0, 0.909}, {1, 2.137}, {2, 4.249}, {3, 6.676}, {4, 8.452}, {5, 9.369}}.

Exercice 2
Dans de nombreux calculs numériques, il est pratique d'introduire des fonctions approchées. Ces dernières peuvent être considérées comme une généralisation des nombres réels approchés. Alors qu'un nombre réel approché donne la valeur, à une certaine précision, d'une simple quantité numérique, une fonction approchée donne la valeur, à une certaine précision, d'une quantité qui dépend d'un ou de plusieurs paramètres. Dans *Mathematica,* les fonctions approchées sont obtenues à l'aide de la commande «Interpolation» et sont représentées par des objets du type «InterpolatingFunction». Ces objets peuvent être utilisés comme des fonctions. Etant donné un argument, un objet du type «InterpolatingFunction» fournit la valeur de la fonction pour cet argument.
a) Trouvez une fonction approchée qui interpole les points de l'exercice 1.
b) Calculez la valeur de cette fonction approchée pour les différentes abscisses des points et comparez aux valeurs obtenues à l'aide des courbes de l'exercice 1.
c) Trouvez un polynôme qui passe exactement par les points de l'exercice 1.

Exercice 3

Pour l'exercice 3, utilisez les commandes disponibles dans le module «Graphics`Spline`»

Réalisez, à l'aide de *Mathematica,* un ajustement par morceaux en considérant les points ci-dessous et en utilisant:
• des polynômes cubiques;
• une courbe de Bézier;
• une courbe de Bézier composée.
Coordonnées des points: {{0.9, 0.9}, {0.5, 0.8}, {0.1, 0.8}, {0.4, 0.5}, {0.1, 0.2}, {0.4, 0.2}, {0.9, 0.2}}.

Exercice 4

Pour l'exercice 4, chargez le module «NumericalMath`SplineFit`»

Dans *Mathematica,* il est possible d'obtenir des fonctions approchées correspondant à des ajustements par morceaux. Ces fonctions s'obtiennent à l'aide de la commande «SplineFit» du module «NumericalMath`SplineFit`» et correspondent à des objets du type «SplineFunction». Il s'agit de fonctions paramétriques qui représentent les courbes d'ajustement. En donnant un argument numérique compris dans le domaine de paramétrisation, on obtient les coordonnées du point correspondant à cette valeur du paramètre. Trouvez les fonctions paramétriques correspondant aux ajustements de l'exercice 3.

Prochaine réunion: lundi 10 janvier 1994 à 17h.