

Lettre n° 27

Selon une hypothèse de base de l'économétrie, l'évolution du prix d'une marchandise suit deux tendances: l'une, régulière, dépendant des mécanismes économiques modélisés; l'autre, aléatoire, dépendant des erreurs de mesure

L'évolution du prix de certaines marchandises peut être décrit par des courbes fractales. Cette constatation ruine l'hypothèse de base de l'économétrie

Lundi 10 janvier 1994 à 17 h

Les fractales en économétrie

Bernard Vuilleumier

L'économétrie s'occupe du traitement mathématique de données statistiques concernant les phénomènes économiques. Une démarche très fréquente en économétrie consiste à créer un modèle d'un phénomène économique, à l'ajuster, puis à déterminer dans quelle mesure il décrit correctement le phénomène envisagé. En bref, on peut donc dire que l'économétrie est l'art d'analyser et de quantifier les erreurs des théories économiques.

Les mécanismes économiques sont souvent complexes et font intervenir un très grand nombre de variables et de relations. En outre, la plupart des variables économiques sont mesurées avec des erreurs. Mais, pour être utilisable, un modèle doit être simple. A titre de compromis, lorsqu'on construit un modèle économétrique, on introduit, en plus des variables explicatives, une variable aléatoire – appelée *résidu* – qui représente la somme de tous les effets non pris en compte ainsi que les éventuelles erreurs de mesure. On fait l'hypothèse que l'erreur suit une loi de distribution normale. Si on modélise l'évolution du prix d'une marchandise par exemple, on trouvera donc deux tendances: l'une, régulière, dépendant des mécanismes économiques modélisés; l'autre, aléatoire, dépendant des erreurs de mesure.



Fig. 1 : Evolution du prix d'une marchandise (en ordonnée) selon un modèle économétrique standard. D'un graphique au suivant (de gauche à droite), la durée envisagée est chaque fois divisée par quatre. En dilatant ainsi l'échelle du temps, on modifie l'aspect de la courbe: il n'y a pas d'invariance d'échelle.

Dans un de ses premiers travaux⁽¹⁾, Mandelbrot étudia l'évolution du prix du coton de 1880 à 1958. Il arriva à la conclusion que la courbe décrivant cette évolution présentait une *invariance d'échelle*. En d'autres termes, les variations de prix ont toujours la même allure, quelle que soit la durée sur laquelle on les examine. Ce type de comportement – qui ruine l'hypothèse de base de l'économétrie – peut être modélisé par une fractale.

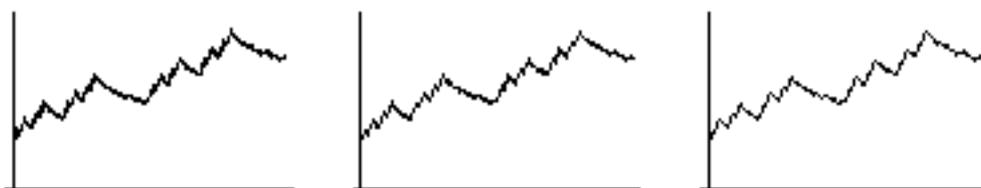


Fig. 2 : Evolution du prix d'une marchandise décrit par une courbe fractale. D'un graphique au suivant (de gauche à droite), la durée envisagée est chaque fois divisée par quatre. En dilatant ainsi l'échelle temporelle, on ne modifie pas l'aspect de la courbe: il y a invariance d'échelle.

⁽¹⁾ Benoît Mandelbrot (1963), The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business* 36: 394 - 419.

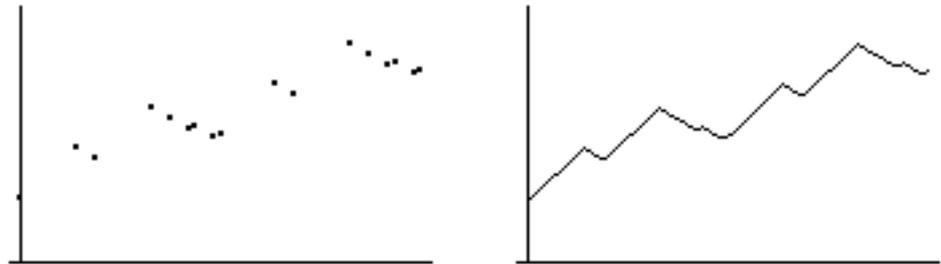
Travaux pratiques

Exercice 1

a) Construire une fonction par morceaux à l'aide de segments de droites reliant les 17 points suivants:

$\{(0.00, 0.25), (0.14, 0.45), (0.19, 0.41), (0.33, 0.6), (0.37, 0.56),$
 $(0.42, 0.52), (0.44, 0.53), (0.48, 0.49), (0.5, 0.5), (0.64, 0.7),$
 $(0.69, 0.66), (0.83, 0.85), (0.88, 0.81), (0.92, 0.77), (0.94, 0.78),$
 $(0.98, 0.74), (1.00, 0.75)\}$

En reliant ces points, on obtient une fonction qui se présente ainsi:



Supposons que cette fonction correspond à un modèle économétrique. Sous cette forme, le modèle ne tient pas compte des éventuelles erreurs de mesure.

b) En introduisant une variable aléatoire dans la fonction obtenue sous a), calculer n points régulièrement espacés, et affectés chacun d'une erreur. On supposera que la distribution des erreurs suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ .

c) Obtenir, à partir de différents échantillons de points, la droite qui passe «au mieux» par les points retenus à l'aide de régressions linéaires.

Exercice 2

Le fichier TP27.ST contient une liste de 4097 points correspondant à une série temporelle.

a) Représenter graphiquement cette série temporelle.

b) Obtenir, à partir de différents échantillons de points, la droite qui passe «au mieux» par les points retenus à l'aide de régressions linéaires.

c) Les résultats obtenus sous b) sont-ils compatibles avec le modèle de l'exercice 1 ?

N.B. Les points du fichier TP27.ST peuvent être obtenus à l'aide de la 6^e fonction de la suite de fonctions définissant la fonction de Bolzano (voir lettre n° 24).

Prochaine réunion: lundi 7 février 1994 à 17h.

