Club

Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 29

Lundi 7 mars 1994 à 17 h

Chaos et calcul numérique

Le lemme de l'ombre

Bernard Vuilleumier

Quelle est la valeur d'un calcul numérique en présence de chaos?

En donnant un contenu et un sens précis au terme généralement vague de globalité, la science du chaos et du changement a révolutionné notre vision des choses. Les frontières érigées entre disciplines chancellent : des mathématiciens étudient des systèmes biologiques; des physiciens s'attaquent à des problèmes de neurophysiologie; des physiologistes se penchent sur les mathématiques. Une appréhension nouvelle des concepts d'ordre, de chaos et d'évolution a vu le jour. La turbulence – qui apparaît dans les courants d'air, dans le cours rapide des rivières tourbillonnant autour des rochers, dans l'écoulement de la lave des volcans, dans les typhons et les raz de marée – bouleverse des systèmes ordonnés et entraîne le déferlement du désordre.

L'étude de la turbulence utilise l'ordinateur comme une sonde pour s'immiscer à l'intérieur de phénomènes turbulents et visualiser les résultats des équations utilisées pour modéliser la turbulence. Mais quelle est la valeur d'un calcul numérique en présence de chaos?

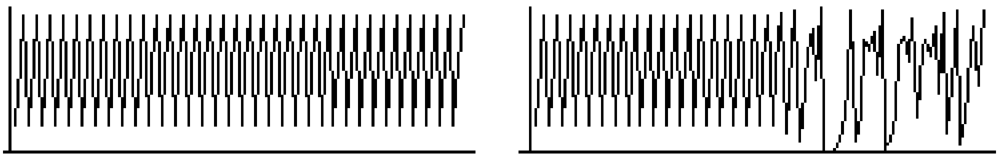

Fig. 1 : Orbite réelle (à gauche) et orbite calculée (à droite). L'orbite réelle est périodique de période 3. Après un certain nombre d'itérations, l'orbite calculée commence à s'éloigner de l'orbite réelle.

Toutes les valeurs calculées avec un modèle chaotique sont fausses!

Les comportements théorique et calculé d'un système chaotique diffèrent pratiquement toujours d'une manière significative. Ceci est une conséquence de l'extrême sensibilité de ces systèmes (voir lettres nº 27 et 28 du club «Modélisation et Simulation») et de la précision limitée des ordinateurs. Il est dès lors légitime de se demander s'il est vraiment utile de calculer quoi que ce soit en présence de chaos. Supposons par exemple qu'on dispose d'un modèle chaotique pour décrire le mouvement d'une planète; toutes les positions calculées avec ce modèle seront fausses ! Les premières ne seront entachées que de petites erreurs, mais, rapidement, les erreurs deviendront aussi grandes que les positions calculées. A quoi cela sert-il donc de calculer l'orbite de cette planète ? La réponse est étonnante et incroyable : bien que l'orbite calculée soit fondamentalement fausse, elle est utile dans la mesure où elle s'approche toujours de très près d'une orbite réelle de la planète. Et cette approximation n'est pas seulement valable pour les premières positions calculées, mais pour toutes ! Cela signifie que l'orbite calculée est toujours très proche d'une orbite réelle, et qu'elle la suit, un peu comme votre ombre vous suit dans vos déplacements, quel que soit l'itinéraire que vous empruntez. Pour cette raison, on parle, dans les milieux de la recherche sur le chaos, du «lemme de l'ombre».

Bien que l'orbite calculée avec un modèle chaotique soit fondamentalement fausse, elle s'approche toujours de très près d'une orbite réelle

Travaux pratiques

Pour illustrer le fait que les comportements théorique et calculé d'un système chaotique diffèrent pratiquement toujours d'une manière significative, nous allons itérer la fonction $f(x)=4x(1-x)$ qui joue un rôle fondamental en théorie du chaos car elle permet de mettre en évidence toutes les propriétés du chaos tout en étant suffisamment simple pour se prêter à une analyse mathématique.

Exercice

La «transformation de la tente» (nommée ainsi en raison de l'aspect de la fonction qui la définit) est donnée par:

$$T(x) = 2x \qquad \text{si } x \le 0.5$$
$$T(x) = -2x+2 \qquad \text{si } x > 0.5$$

Cette transformation joue un rôle important en théorie du chaos car on peut démontrer que par le changement de coordonnées $x' = h(x) = \sin^2(\pi x/2)$, les orbites obtenues en itérant $T(x)$ à partir de x_0 sont équivalentes à celles obtenues en itérant la fonction quadratique $f(x)=4x(1-x)$ à partir de x_0'.

a) Construisez le graphique de la transformation de la tente.
b) Itérez la fonction $T(x)$ à partir de $x_0=2/7$.
c) Calculez l'image x_0' de x_0 à l'aide du changement de coordonnées $h(x)= \sin^2(\pi x/2)$.
d) Itérez 102 fois la fonction $f(x)=4x(1-x)$ à partir de x_0' et reportez x_n' en fonction de n.

Prochaine réunion: lundi 11 avril 1994 à 17 h.