Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Responsable:
Raymond Morel

Lettre nº 32

Lundi 5 septembre 1994

L'équation logistique

Bernard Vuilleumier

Il existe des équations très simples qui peuvent donner lieu à des comportements d'une extraordinaire richesse

L'équation logistique discrète est l'équation non linéaire la plus simple qui soit, mais son étude est riche d'enseignements

En 1976, dans la conclusion d'un article désormais célèbre(1), Robert May attirait l'attention du monde de l'éducation sur les richesses de l'équation logistique et sur les bénéfices qui pourraient résulter de son étude:

> *«Je recommande fortement d'introduire l'étude de l'équation logistique de bonne heure dans l'éducation mathématique. Cette équation peut être étudiée phénoménologiquement en l'itérant sur une calculatrice ou même à la main. Son étude nécessite moins de sophistication conceptuelle qu'un cours élémentaire d'analyse. Une telle étude enrichirait grandement l'intuition des étudiants à propos des systèmes non linéaires.*
>
> *Non seulement en recherche, mais également dans la vie politique et économique de tous les jours, nous nous en sortirions tous mieux si davantage de personnes comprenaient que des systèmes non linéaires simples ne possèdent pas nécessairement des propriétés dynamiques simples.»*

Il existe de nombreuses situations – dans toutes les disciplines – qui peuvent être décrites par des équations aux différences du premier ordre. L'étude des propriétés dynamiques d'équations non linéaires très simples peut donner lieu à des comportements d'une extraordinaire richesse, allant de l'équilibre au chaos par une succession de cycles périodiques. L'équation logistique, dont l'étude peut être entreprise dans un cours de mathématiques élémentaires, est la plus simple des équations non linéaires permettant de mettre en évidence ces comportements.

Une situation typique, qui intervient souvent en biologie, est la reproduction saisonnière de populations d'insectes, sans recouvrement des générations. L'effectif de la population au temps $t+1$, noté x_{t+1}, est alors relié à l'effectif de la génération précédente, noté x_t. Une telle relation peut être exprimée par:

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{1}$$

Dans cet exemple, la variable x désigne une *population*. Mais il existe d'innombrables situations, en dehors des problèmes d'évolution de populations, dans lesquelles l'équation (1) s'applique. En génétique, cette équation peut décrire le changement de la *fréquence des gènes* au cours du temps; en épidémiologie, la *fraction de la population infectée* au temps t; en économie, l'évolution du *prix de biens de consommation*; en psychologie, la *quantité d'information mémorisée* après un temps d'apprentissage; en sociologie, la propagation de rumeurs (x représente alors le *nombre de personnes connaissant la rumeur* après un temps t).

Dans la plupart des cas, et pour l'évolution de populations en particulier, la variable x augmente d'une génération à la suivante lorsqu'elle est petite, et elle diminue lorsqu'elle est grande. La fonction non linéaire $f(x)$ possède très souvent les propriétés suivantes: $f(0) = 0$; $f(x)$ croît d'une manière monotone lorsque x augmente dans un intervale $0 < x < a$, atteint un maximum en $x = a$, puis décroît d'une manière monotone. $f(x)$ – dont le graphique se présente donc sous la forme d'une bosse – comporte habituellement un ou plusieurs paramètres qui permettent de modifier l'aspect de la bosse. En posant par exemple $f(x) = rx(1 - x)$, où r correspond à un taux de reproduction, on obtient l'équation logistique discrète:

$$x_{t+1} = rx_t(1 - x_t) \tag{2}$$

Exprimée sous cette forme, c'est certainement l'équation non linéaire aux différences la plus simple qui soit. Mais son étude est riche d'enseignements et révèle des surprises inattendues.

(1) Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, Vol. **261**, Nº 5560, pp 459–467.

Travaux pratiques

Pour se familiariser avec les fonctions quadratiques à un et à deux paramètres

Exercice 1

a) Construisez une fonction $f(x)$ présentant les caractéristiques suivantes:
• $f(0) = 0$, $f(0.5) = 1$, $f(1) = 0$;
• $f(x)$ possède un maximum en $x = 0.5$;
• $f(x)$ croît d'une manière monotone pour $0 < x < 0.5$;
• $f(x)$ décroît d'une manière monotone lorsque $x > 0.5$.

b) Construisez une fonction à un paramètre $f_a(x)$ présentant les caractéristiques suivantes:
• $f_a(0) = 0$; $f_a(a) = 1$
• $f_a(x)$ possède un maximum en $x = a$;
• $f_a(x)$ croît d'une manière monotone pour $0 < x < a$;
• $f_a(x)$ décroît d'une manière monotone lorsque $x > a$;
Quelle est la signification du paramètre a ?

c) Construisez une fonction à deux paramètres $f_{ab}(x)$ présentant les caractéristiques suivantes:
• $f_{ab}(0) = 0$;
• $f_{ab}(x)$ possède un maximum en $x = a$;
• $f_{ab}(x)$ croît d'une manière monotone pour $0 < x < a$;
• $f_{ab}(x)$ décroît d'une manière monotone lorsque $x > a$.
Quelle est la signification du paramètre b ?

Pour apprendre à itérer une fonction et à représenter graphiquement le résultat des itérations

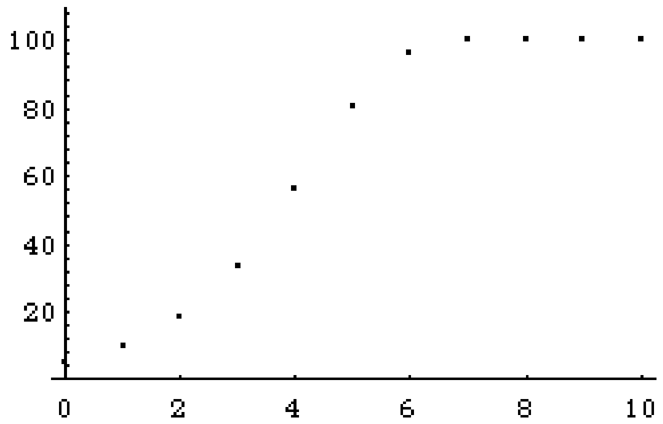
Exercice 2

a) Entrez n'importe quel nombre sur votre calculatrice, puis, pressez plusieurs fois de suite sur la touche de fonction «COS». Que constatez-vous? Répétez l'expérience avec les fonctions «SIN», «EXP», etc.
b) Représentez graphiquement les valeurs obtenues sous a) en fonction du nombre de pressions effectuées.

Pour exercer la démarche inductive et apprendre à interpréter une équation

Exercice 3

L'évolution saisonnière d'une population de N insectes est décrite par l'équation $N_{t+1} = N_t(r - sN_t)$
a) Examinez l'effet des paramètres r et s sur l'évolution de la population.
Indication: commencez par examiner ce qui se passe pour différentes valeurs de r lorsque $s = 0$.
b) Cherchez deux paramètres r et s qui, pour une population initiale N_0=5, donnent lieu à l'évolution suivante:



c) Récrivez l'équation d'évolution de la population en posant $x = sN/r$.

Prochaine réunion: lundi 3 octobre 1994 à 17 h.