Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Responsable:
Raymond Morel

Lettre n° 33

La plupart des étudiants ont le sentiment que les mathématiques sont une discipline morte

C'est un devoir de l'enseignant de saisir chaque opportunité de donner un aperçu des nouveautés en mathématiques et d'illustrer leur vitalité

L'étude des systèmes dynamiques est une aire importante de la recherche actuelle en mathématiques. Elle présente l'avantage d'être accessible au non spécialiste

Lundi 3 octobre 1994

Systèmes dynamiques

Bernard Vuilleumier

La plupart des étudiants ont le sentiment que les mathématiques sont une discipline morte et que la carrière de mathématicien ne conduit qu'à l'enseignement, et donc à la perpétuation d'une discipline figée. Ils n'ont en général aucune idée ni aucune compréhension de ce que font réellement les mathématiciens. Il est vrai que les mathématiques sont une science cumulative et qu'il est fort difficile au non spécialiste de comprendre et de communiquer des résultats récents de la recherche en mathématiques. Mais il y a des exceptions; et je considère que c'est un devoir de l'enseignant de saisir chaque opportunité de donner un aperçu des nouveautés en mathématiques et d'illustrer leur vitalité.

L'étude des systèmes dynamiques est une aire importante de la recherche actuelle en mathématiques et elle présente l'avantage d'être accessible au non spécialiste. Un aspect de cette étude fait intervenir l'*itération de fonctions mathématiques*. La question qui se pose est alors de savoir ce qui se produira si on itère encore et encore. Aussi surprenant que cela puisse paraître, même pour des expressions mathématiques très simples comme des fonctions quadratiques ou cubiques d'une variable réelle ou complexe, personne ne connaît la réponse complète ! Et il y a plusieurs mathématiciens de par le monde qui étudient très sérieusement cette question. C'est un exemple de problème actuel et irrésolu des mathématiques qu'il est facile d'exposer à des étudiants. Ils sont toujours très surpris d'apprendre que tout n'est pas encore connu à propos des fonctions quadratiques. Cela peut leur donner envie de se plonger dans cette étude et d'explorer par eux-mêmes.

Le processus d'itération nécessite le recours à une calculatrice ou à un ordinateur. En utilisant des fonctions simples, un programme de quelques lignes et des techniques graphiques élémentaires, l'étudiant pourra calculer et visualiser des centaines ou des milliers d'itérations. Cette perspective est radicalement nouvelle dans l'enseignement des mathématiques. Elle confère à cette discipline une composante expérimentale. Les physiciens, les chimistes et les biologistes utilisent depuis longtemps le laboratoire comme apport essentiel à leurs cours d'introduction. Avec les moyens informatiques actuels, les mathématiciens ont maintenant la même possibilité.

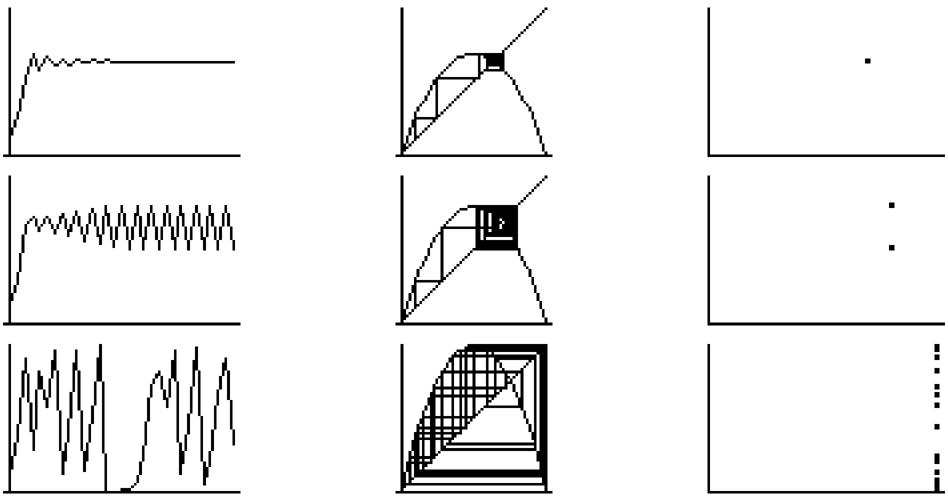

Fig. 1 : L'itération d'une fonction quadratique à un paramètre peut conduire, selon la valeur du paramètre, à l'équilibre (première ligne), à un cycle périodique (deuxième ligne) ou au chaos (troisième ligne). Les graphiques de la première colonne donnent l'évolution temporelle, ceux de la deuxième illustrent la méthode graphique d'itération et ceux de la troisième fournissent l'état final.

Travaux pratiques

Pour apprendre à itérer une fonction et à représenter graphiquement le résultat des itérations

Exercice 1

L'itération d'une fonction peut être considérée comme la composition de cette fonction avec elle-même. En appliquant la fonction à une valeur (entrée), on obtient une nouvelle valeur (sortie) à laquelle on applique de nouveau la fonction, et ainsi de suite. Vous pouvez réaliser ce processus à l'aide de votre calculatrice en entrant par exemple un nombre positif (entrée) et en prenant la racine carrée de ce nombre (sortie). Si vous appuyez successivement sur la touche «SQRT», vous composez la fonction racine avec elle-même et vous réalisez une itération de cette fonction. Le nombre de fois que vous avez pressé sur la touche «SQRT» correspond au nombre de fois que vous avez composé la fonction avec elle-même, c'est-à-dire au nombre de fois que vous l'avez itérée.

Les fonctions quadratiques peuvent donner lieu à une grande variété de comportements lorsqu'elles sont itérées. D'un point de vue géométrique, les fonctions quadratiques ont la forme d'une parabole. Leur expression algébrique générale comporte trois paramètres a, b et c : $f(x) = ax^2 + bx + c$

Lorsque $a = -r$, $b = r$ et $c = 0$, la fonction quadratique s'exprime par $f(x) = -rx^2 + rx = rx(1-x)$. Toutes les paraboles exprimées sous cette forme coupent l'axe Ox en (0, 0) et en (1, 0) et se présentent comme des «bosses». La bosse est de plus en plus haute et les «flancs» de plus en plus raides à mesure que le paramètre r augmente. Lorsque $1 \leq r \leq 4$, tous les points de l'intervalle $0 \leq x_0 \leq 1$ restent dans cet intervalle lorsque la fonction est itérée. La dynamique la plus intéressante se produit dans cet intervalle (voir fig. 1 au recto).

a) Itérez 30 fois, en partant de $x_0 = 0.1$, les fonctions ci-dessous:

- $f(x) = 2.8x(1-x)$
- $f(x) = 3.2x(1-x)$
- $f(x) = 4x(1-x)$

b) Reportez sur un graphique les valeurs obtenues en fonction du nombre d'itérations.

Pour apprendre à dessiner l'orbite d'une valeur initiale au cours d'un processus d'itération d'une fonction

Exercice 2

L'itération d'une fonction peut se représenter graphiquement. Elle donne lieu à une orbite. Pour obtenir cette orbite, reportez sur le même système d'axes la fonction $f(x) = rx(1-x)$ et $y = x$. A partir d'une valeur initiale x_0, tracez une verticale de la droite $y = x$ jusqu'à $f(x_0)$, puis, de là, une horizontale jusqu'à $y = x$. Vous obtenez ainsi x_1, première image de x_0. En considérant x_1 comme nouveau point initial et en répétant les opérations décrites ci-dessus, vous obtenez x_2, deuxième image de x_0, etc. Ces images successives constituent l'orbite de x_0 sur la droite $y = x$.

a) Construisez les orbites de $x_0 = 0.1$ pour les fonctions de l'exercice 1.

b) Examinez, pour ces mêmes fonctions, les orbites de différentes valeurs initiales.

Pour apprendre à calculer les coordonnées d'un point fixe et à identifier sa nature

Exercice 3

Les points fixes d'une fonction correspondent aux intersections du graphe de la fonction avec la droite $y = x$. Un point fixe peut être attractif, répulsif ou indifférent. En examinant les orbites au voisinage d'un point fixe, il est possible de déterminer la nature du point fixe. Ces orbites sont étroitement liées à la pente de la fonction aux points fixes.

a) Calculez les coordonnées des points fixes des fonctions de l'exercice 1 et identifiez leur nature.

b) Etablissez une relation entre la nature d'un point fixe et la pente de la fonction en ce point.

Prochaine réunion: lundi 7 novembre 1994 à 17 h.