Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Responsable:
Raymond Morel

Lettre n° 34

Lundi 7 novembre 1994

Bifurcations

Bernard Vuilleumier

Dans certains systèmes, la variation d'un paramètre crée des bifurcations

La bifurcation, terme qui signifie point de branchement ou fourche, est un concept essentiel en théorie des systèmes dynamiques. La variation d'un paramètre peut créer un embranchement – ou point de bifurcation – dans un système. Pour illustrer cette notion, nous allons considérer la convection thermique, phénomène qui est à la base des mouvements de l'atmosphère et des océans sur la Terre aussi bien que des transferts de chaleur et de matière sur le Soleil. Dans un fluide dilatable, toute différence de température tend en effet à créer une différence de densité: si le fluide est placé dans un champ de pesanteur, cette différence de densité engendre alors des forces pouvant entraîner le fluide en mouvement.

Imaginons une couche de fluide entre deux plaques rectangulaires horizontales dont les dimensions sont beaucoup plus grandes que l'épaisseur de la couche. Si nous fournissons de l'énergie au système en chauffant la plaque inférieure, nous créons un écart de température ΔT entre les deux plaques. Lorsque cet écart de température atteint une valeur critique ΔT_c, des mouvements convectifs apparaissent sous forme de rouleaux, d'axes horizontaux parallèles entre eux et perpendiculaires aux grands côtés des plaques. Deux rouleaux adjacents ont nécessairement des sens de rotation opposés (voir fig. 1). Des instabilités convectives de ce type ont été mises en évidence expérimentalement par Bénard en 1900 et interprétées pour la première fois par Lord Rayleigh en 1916 [(1)]. A l'apparition des mouvements convectifs, il y a une bifurcation. Deux situations qualitativement différentes peuvent se produire: les rouleaux de numéros impairs tournent dans le sens positif, ou ils tournent dans le sens négatif. Autrement dit, en un point du fluide, la vitesse peut tout aussi bien être dirigée dans un sens que dans le sens opposé. Le sens de rotation des rouleaux dépend du chemin que le système a emprunté à la bifurcation ΔT_c.

Aux points de bifurcation, plusieurs possibilités s'offrent au système

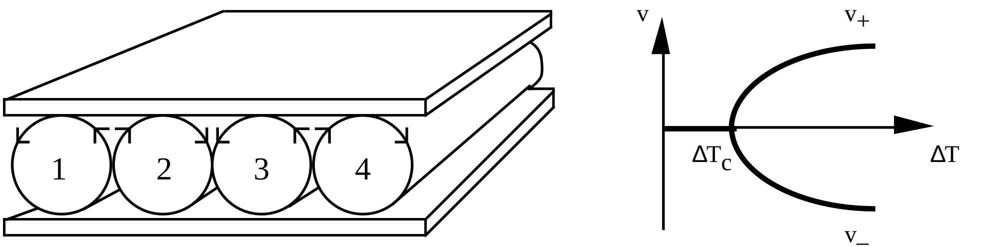

Fig. 1 : Un fluide, placé entre deux plaques horizontales entre lesquelles un écart de température ΔT est maintenu, se met en mouvement et forme des rouleaux lorsque l'écart de température ΔT dépasse une certaine valeur critique ΔT_c. Pour un rouleau donné, la rotation peut s'effectuer dans le sens positif ou dans le sens négatif, selon que le système emprunte une branche ou l'autre au point de bifurcation ΔT_c.

Les bifurcations sont les bornes de l'évolution d'un système; elles cristallisent son histoire

Lorsqu'un système passe un point de bifurcation, plusieurs solutions sont possibles pour une valeur donnée d'un paramètre. Selon que telle ou telle infime perturbation, par nature imprévisible et non maîtrisable, prévaudra à ce moment, le système optera pour l'une ou l'autre solution. Le fait qu'une seule possibilité se réalise confère au système une «dimension historique», ou, à tout le moins, une mémoire des événements passés. L'évolution d'un système est conditionnée par les «choix» opérés aux points critiques : les bifurcations sont les bornes de l'évolution d'un système; elles cristallisent son histoire.

[(1)] Lord Rayleigh, On convective currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Phil. Mag.* **32**, (1916), pp 529–546.

Travaux pratiques

Une simple fonction quadratique permet d'explorer la route qui va de l'ordre au chaos

Préliminaire

De nombreux systèmes naturels passent d'un état ordonné à un état chaotique (passage de l'écoulement laminaire d'un fluide à un écoulement turbulent par exemple). Ce changement qualitatif abrupt qui marque la transition de l'ordre au chaos est appelé bifurcation. Apparemment, il n'y a aucune raison que le processus d'itération d'une simple fonction quadratique (voir lettres CM 32 et CM 33) ait un quelconque rapport avec des phénomènes physiques aussi complexes. Et pourtant, dès le début des années 80, des physiciens ont réalisé une variété d'expériences (en hydrodynamique, en électronique, en optique, en acoustique) qui présentent des caractéristiques identiques à celles que l'on peut observer en itérant une fonction quadratique. Le passage d'un état ordonné à un état chaotique peut être décrit par une loi simple; c'est une des grandes découvertes de la recherche en systèmes dynamiques de ces dernières années. Nous utiliserons donc la fonction quadratique $f(x) = rx(1 - x)$ pour expliquer la notion de bifurcation.

Pour examiner l'évolution d'un système dynamique et obtenir son état final

Exercice 1

a) Explorez le comportement à long terme du système défini par l'itération de la fonction quadratique à un paramètre $f(x) = rx(1 - x)$ (nous appellerons désormais ce système *itérateur quadratique*). Partez de différentes valeurs initiales tirées au hasard et essayez les valeurs suivantes pour le paramètre:

- $r = 2$
- $r = 3.3$
- $r = 3.5$
- $r = 3.563$

b) Décrivez le changement qualitatif de comportement du système lorsqu'on passe d'une des valeurs du paramètre à la suivante.

c) Etablissez le diagramme d'état final du système en reportant les nombres obtenus après un grand nombre d'itérations en fonction de la valeur du paramètre.

Pour obtenir les états stables et les états périodiques d'un système

Exercice 2

Pour des valeurs de r comprises entre 1 et 3, l'itérateur quadratique ne possède qu'un point fixe stable (l'autre est répulsif). En $r = 3$, il se produit une bifurcation : le point fixe perd sa stabilité et devient répulsif. Le système adopte alors un comportement oscillant. Calculez et représentez, en fonction du paramètre r $(1 \leq r \leq 4)$ les solutions correspondant:

a) aux points fixes du système;

b) aux points périodiques de période 2.

Pour apprendre à construire un diagramme de bifurcation

Exercice 3

Construisez le diagramme de bifurcation de l'itérateur quadratique $f(x) = rx(1 - x)$.
Indication : le diagramme de bifurcation d'un système s'obtient en assemblant plusieurs de ses diagrammes d'état final.

Prochaine réunion : lundi 5 décembre 1994 à 17 h.