Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Responsable:
Raymond Morel

Lettre n° 35

Lundi 5 décembre 1994

Transformations

Bernard Vuilleumier

Certaines transformations géométriques que l'on peut faire comprendre et illustrer facilement permettent d'obtenir des sous-ensembles «compliqués» d'espaces géométriques simples. Des transformations telles que l'*allongement*, le *rétrécissement*, la *rotation* et le *rabattement* peuvent être spécifiées complètement à l'aide d'un petit ensemble de nombres. Ces transformations peuvent agir sur différents espaces géométriques: droite, plan, etc. Un bon moyen de comprendre la signification des nombres exprimant la transformation d'un espace géométrique, consiste à examiner l'effet de cette transformation sur une figure, plutôt que sur un point de cet espace. On saisira mieux l'effet d'une transformation linéaire du plan – qui transforme toujours les lignes droites en lignes droites et qui peut être définie à l'aide de quatre nombres uniquement – en examinant la modification qu'elle produit sur le carré de gauche ci-dessous plutôt que sur un seul de ses sommets.

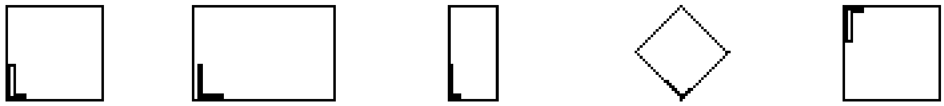


Fig. 1: Le carré de gauche subit respectivement un allongement, un rétrécissement, une contraction suivie d'une rotation, et finalement un rabattement. Chacune de ces transformations peut être caractérisée à l'aide de quatre nombres uniquement.

Au cours d'une transformation affine, les lignes droites restent des lignes droites et les parallélogrammes demeurent des parallélogrammes

Considérons une photocopieuse capable de produire des réductions. Si nous photocopions une image, nous obtenons une image plus petite. En termes mathématiques, nous dirons que l'image initiale a subi une *transformation affine contractante*. Si nous replaçons chaque fois la copie obtenue sur la machine, nous obtiendrons une image qui finira par ressembler à un point. Imaginons maintenant une photocopieuse qui comporte plusieurs objectifs. Comme chaque objectif fournit une copie réduite de l'image initiale, l'image obtenue comportera autant d'images réduites qu'il y a d'objectifs. Nous avons maintenant, d'un point de vue mathématique, un *système de fonctions affines*. Ce système décrit les transformations opérées par les objectifs. Si nous replaçons la copie obtenue sur la machine, nous créons un processus itératif qui peut être caractérisé par un *système de fonctions itérées*. Quelle image obtiendrons-nous alors après n itérations? Pour l'instant, nous ne savons qu'une chose: l'image finale sera composée d'une collection d'images de plus en plus petites et tendant chacune vers un point. La figure ci-dessous illustre le principe de construction d'un sous-ensemble «compliqué» du plan à l'aide d'un système de fonctions itérées.

En appliquant de simples transformations affines à une image initiale, et en réitérant leur application à l'image obtenue, on peut créer des images fort compliquées

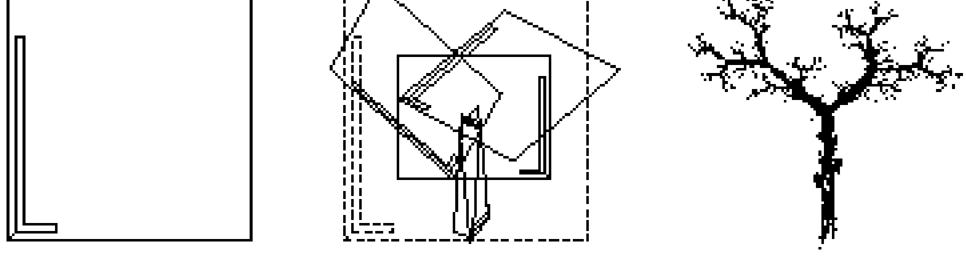


Fig. 2: Le carré de gauche, en subissant 5 transformations affines, donne l'image en traits pleins du centre. Si on réitère l'application de ces transformations à l'image obtenue, on obtient, après un certain nombre d'étapes, l'image de droite, qui ne se modifie plus. Qui aurait pu croire, que l'image de cet arbre, pouvait être encodée simplement à l'aide de 5 transformations affines, c'est-à-dire de 30 nombres?

Travaux pratiques

Pour apprendre quelques définitions et différentes notations relatives aux transformations affines

Exercice 1

Une *transformation affine* w du plan associe, à chaque point (x, y), le nouveau point:

$$w(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$$

Nous utiliserons la notation équivalente suivante:

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Les six nombres a, b, c, d, e, f spécifient complètement la transformation affine w du plan (modification et translation). a, b, c et d sont les coefficients d'une *matrice* 2 x 2 qui caractérise la modification. e et f sont les composantes d'un vecteur qui définit la *translation*. Si les composantes du vecteur translation sont nulles, on parle de *transformation linéaire*.

La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ peut toujours s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\phi) & -s\sin(\psi) \\ r\sin(\phi) & s\cos(\psi) \end{pmatrix}$

a) Examinez l'effet des transformations linéaires w_i suivantes sur une figure du plan:

	a	*b*	*c*	*d*
w_1	2	0	0	1
w_2	1	0	0	2
w_3	1	0	0	-1
w_4	-1	0	0	1
w_5	1/2	- 1/2	1/2	1/2

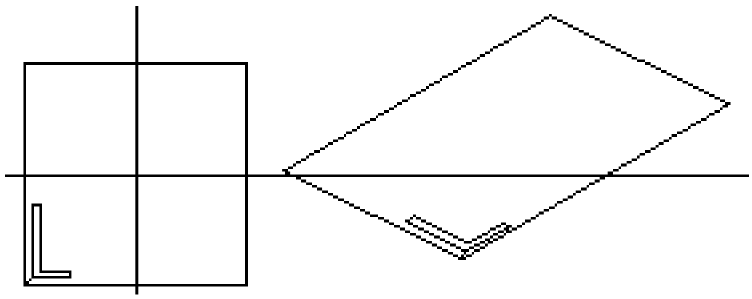
b) Exprimez les transformations w_i ci-dessus à l'aide des grandeurs r, s, ϕ et ψ.

Pour apprendre à trouver les nombres qui caractérisent une transformation affine

Exercice 2

a) Trouvez les nombres a, b, c, d ainsi que les grandeurs r, s, ϕ et ψ qui caractérisent les transformations linéaires de la figure 1 (au recto) en considérant le carré de gauche comme image initiale.

b) Trouvez les nombres a, b, c, d, e, f ainsi que les grandeurs r, s, ϕ et ψ qui spécifient la transformation affine illustrée ci-dessous:



Pour apprendre à mettre en œuvre des transformations affines données par leurs coefficients

Exercice 3

On donne cinq transformations affines w_i par leurs coefficients a, b, c, d, e, f

	a	*b*	*c*	*d*	e	*f*
w_1	- 0.63	0	0	0.5	3.4	1
w_2	0.2	- 0.5	0.35	0.45	1.8	1
w_3	0.47	0.44	- 0.25	0.37	0.9	2.3
w_4	- 0.05	- 0.08	0.46	- 0.1	2.4	0.35
w_5	- 0.04	0.08	- 0.48	- 0.03	1.95	2.05

Appliquez ces cinq transformations à une image initiale, puis, répétez l'application de ces transformations à l'image obtenue.

Prochaine réunion: lundi 9 janvier 1995 à 17h.