Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Directeur:
Raymond Morel

Lettre nº 36

Lundi 9 janvier 1995 à 17 h

Autosimilitude

Bernard Vuilleumier

Le concept d'autosimilitude a vu le jour en mathématiques, mais de nombreuses formes naturelles présentent une autosimilitude approchée

Certaines fonctions continues mais non dérivables sont autosimilaires au sens strict

L'autosimilitude parfaite ne peut pas se voir, mais on peut l'approcher par des constructions géométriques élémentaires

Le concept d'autosimilitude est un concept «profond». Il est apparu simultanément dans deux domaines indépendants – les ensembles de Cantor et les fonctions de Weierstrass – pour les mêmes raisons : élucider les fondements des mathématiques, en particulier la notion de «nombre» et celle de «fonction». On dit d'un objet qu'il est autosimilaire ou invariant d'échelle s'il est reproduit par l'agrandissement de l'une de ses parties. L'objet mathématique le plus simple présentant cette propriété est la droite. De nombreuses formes naturelles présentent une autosimilitude approximative : une partie de nuage agrandie ressemble beaucoup à un nuage, une partie de choux-fleur à un choux-fleur, un néphron à un rein, etc.

En 1834, Bolzano définit une fonction autosimilaire continue qui n'admet de tangente en aucun de ses points (voir lettre du Club Math nº 24). Son travail passe inaperçu. En 1872 en revanche, Weierstrass provoque une crise en mathématiques en exhibant une classe de fonctions qui présentent les mêmes propriétés que la fonction de Bolzano: elles sont autosimilaires, continues mais non dérivables. Dériver une fonction, c'est trouver, en chaque point, la pente de la fonction. Cette opération de base des mathématiques – inventée indépendamment par Newton et Leibniz environ 200 ans avant Weierstrass – peut facilement être reliée à la notion de tangente. Si la courbe ne possède pas de «pic», trouver la dérivée en un point revient à trouver la pente de la tangente en ce point. Si, en un point, la courbe présente un «pic», il n'est plus possible, en ce point, de définir une tangente de manière univoque. En 1904, Helge von Koch fournit, à l'aide d'une construction géométrique élémentaire, un exemple de courbe autosimilaire, continue et sans tangente[1].

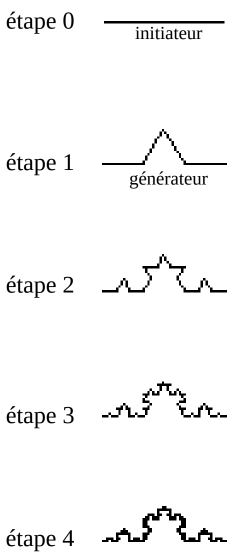


Fig. 1: Principe de construction d'une courbe de Koch à l'aide d'un initiateur et d'un générateur.

La courbe de Koch est une courbe présentant un «pic» en chaque point. Elle se construit à l'aide d'un segment de droite (initiateur) et d'un motif (générateur). On remplace le segment de droite par le générateur (étape 1), puis, chaque segment de droite de la figure obtenue par le générateur convenablement réduit de manière à faire coïncider ses extrémités avec celles du segment remplacé. On réitère le procédé. La courbe de Koch est l'objet limite obtenu lorsque le nombre d'étapes tend vers l'infini. En pratique, on n'atteint bien sûr jamais cette limite et on arrête le procédé dès que la longueur du plus long segment est inférieure à la résolution du système d'affichage utilisé. L'autosimilitude au sens strict ne peut donc pas se voir! Mais le procédé de construction utilisant un initiateur et un générateur permet de l'approcher et d'en comprendre les ressorts. Il constitue, à ce titre, un chemin d'accès privilégié à la compréhension des formes naturelles présentant une autosimilitude approximative.

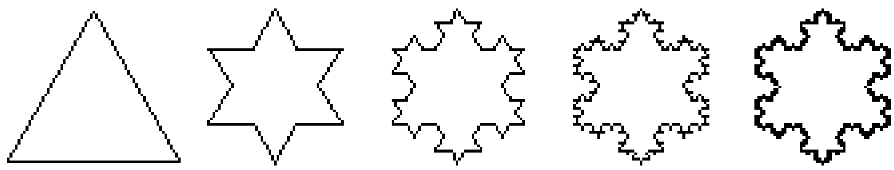


Fig. 2: En choisissant un triangle équilatéral comme initiateur et en conservant le générateur de la courbe de Koch, on obtient un flocon.

[1] Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire, *Ark. Mat. 1* (1904) 681-704.

Travaux pratiques

Pour illustrer l'autosimilitude à l'aide des fonctions de Weierstrass

Exercice 1
Une fonction de Weierstrass est définie par: $w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \cos(\beta^k x)$

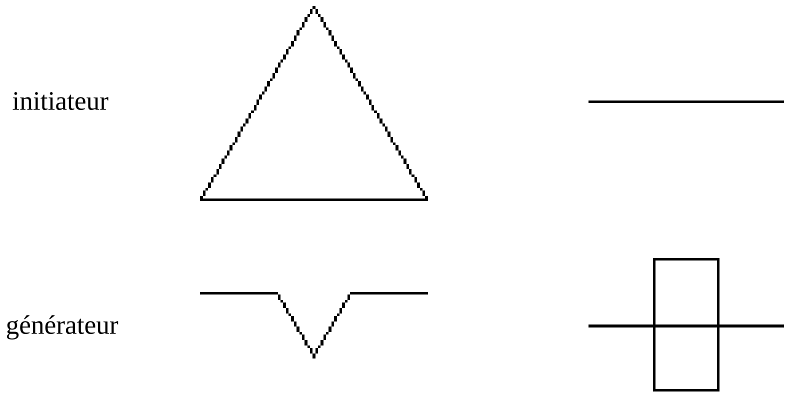
où α , β sont réels et β impair. Weierstrass a montré que, pour $\alpha\beta > 1 + 3\pi/2$, $w(x)$ est continue mais nulle part dérivable.

a) Construisez, à l'aide d'une somme de 5 termes avec $\alpha = 2$ et $\beta = 3$, une approximation d'une fonction de Weierstrass et dessinez-la pour $-0.75 \le x \le 0.75$.

b) Agrandissez la fonction en la dessinant pour $-0.26 \le x \le 0.26$.

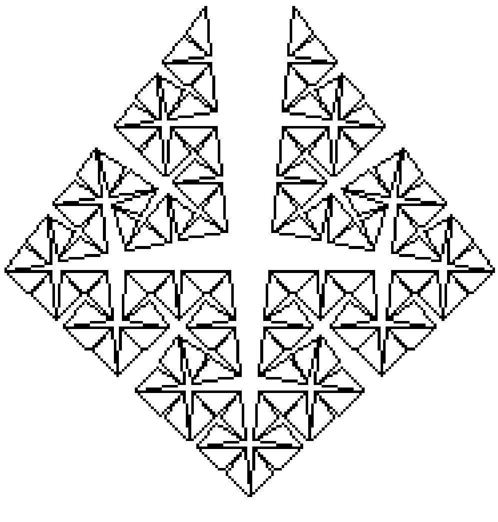
Pour générer des figures autosimilaires à l'aide de constructions géométriques élémentaires et introduire les notions d'initiateur et de générateur

Exercice 2
Construisez des approximations d'objets autosimilaires en utilisant les initiateurs et générateurs suivants: pour l'objet 1 pour l'objet 2



Pour s'exercer à identifier l'initiateur et le générateur dans une figure autosimilaire

Exercice 3
Le dessin ci-dessous est un modèle d'une coupe verticale de poumon:



Cette figure présente une certaine autosimilitude: l' agrandissement d'une partie convenablement choisie redonne approximativement la figure. Elle a été obtenue à l'aide d'un initiateur et d'un générateur en 3 étapes. Trouvez l'initiateur et le générateur qui ont permis de l'obtenir.

Prochaine réunion: lundi 7 février 1995 à 17h.