# Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 781.03.50
Directeur:
Raymond Morel

*Lettre nº 37*

*«La géométrie fractale vous fera voir chaque chose différemment. Il y a un danger. Vous risquez de perdre les visions de votre enfance des nuages, des forêts, des galaxies, des feuilles, des plumes, des fleurs, des rochers, des montagnes, des torrents, des tapis, des briques et de beaucoup d'autres choses. Plus jamais votre interprétation de ces choses ne sera tout à fait la même»*

*Michael Barnsley*

*La dimension physique d'un objet est affaire de degré de résolution. Elle a donc une base pragmatique et subjective, mais elle présente l'énorme avantage de permettre une introduction aisée à la géométrie fractale*

Lundi 7 février 1995 à 17 h

# *Géométrie fractale*

Bernard Vuilleumier

Une droite a la dimension 1, une surface la dimension 2 et un volume la dimension 3. Existe-t-il des objets de dimension intermédiaire? Cette question n'est pas que mathématique! Elle concerne toutes les disciplines en relation avec des sujets tels que la distribution des galaxies, la turbulence, la diffusion, la structure d'organes biologiques, les systèmes de représentation utilisés en cartographie, etc. Le concept de dimension fractale a été élaboré il y a longtemps déjà. En 1919, Haussdorf affirme dans un article(1) que certaines figures idéalisées peuvent avoir une dimension non entière. Le formalisme essentiel en ce qui concerne la dimension fractale est donc publié depuis de nombreuses années. Mais, à ce jour, il n'a pas encore trouvé place dans l'enseignement. C'est peut-être parce que certaines figures associées à ce concept, telles les courbes continues ne possédant aucune tangente, sont encore considérées comme des «monstres». Le mathématicien Charles Hermite (1822–1901) déclarait «se détourner avec effroi de cette plaie lamentable des fonctions qui n'ont pas de dérivées». Les travaux de Benoît Mandelbrot(2) ont pourtant clairement établi que ces figures peuvent avoir quelque chose d'extrêmement simple et intuitif et qu'elles sont réellement utiles dans de très nombreux domaines de la connaissance.

Pour caractériser très grossièrement un objet dont la dimension serait comprise entre 1 et 2 par exemple, nous dirons qu'il doit être plus «effilé» qu'une surface ordinaire, tout en étant plus «massif» qu'une ligne ordinaire. Nous nous référons alors à une caractéristique de l'objet qui est sa *dimension physique*. Mais qu'est-ce donc qu'une dimension physique? C'est une notion qui se rapporte aux relations entre figures et objets, le premier terme dénotant des idéalisations mathématiques et le second des données du réel.

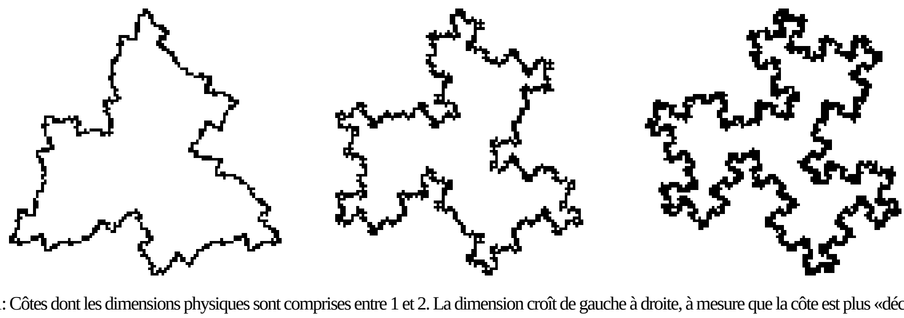

Fig. 1: Côtes dont les dimensions physiques sont comprises entre 1 et 2. La dimension croît de gauche à droite, à mesure que la côte est plus «découpée».

Un fil, un voile ou une petite pelote, aussi fins soient-ils, devraient toujours être représentés par des figures tridimensionnelles. Mais, dans certains cas, il peut être plus utile de considérer qu'une pelote, un fil, ou un voile, s'ils sont suffisamment fins, sont respectivement plus proches des dimensions 0, 1 et 2. Ainsi, une pelote de 10 cm de diamètre faite d'un fil de 1 mm de diamètre peut présenter plusieurs *dimensions physiques*. Au degré de résolution de 10 m, elle a la dimension physique 0. Au degré de résolution de 10 mm c'est un ensemble de fils de dimension 1. Au degré de résolution de 100 µm, chaque fil devient une sorte de colonne, et le tout redevient tridimensionnel. Au degré de résolution de 10 µm, chaque colonne se résout en fibres filiformes de dimension 1. La dimension physique a donc inévitablement une base pragmatique et subjective: elle est affaire de degré de résolution. Mais elle présente l'énorme avantage de permettre une introduction aisée et sans préliminaire formel à la géométrie fractale.

(1) F. Haussdorf (1919). Dimension und äussere Mass, *Mathematische Annalen*, **79**,157-179.
(2) B. Mandelbrot (1982). *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman. San Francisco.

# Travaux pratiques

*La dimension fractale, longtemps considérée comme dépourvue d'applications pratiques, peut par exemple servir à comparer différentes côtes maritimes accidentées*

**Quelle est la longueur d'une côte maritime?**

L'étude de la Terre sert à introduire une première classe de fractales, à savoir les courbes de dimension supérieure à 1. Considérons un bout de côte maritime dans une région accidentée et essayons d'en mesurer effectivement la longueur. Il est évident que cette longueur est au moins égale à la distance en ligne droite entre les extrémités de notre bout de côte. Donc si la côte était droite, le problème serait résolu. Mais une vraie côte sauvage est extrêmement sinueuse et donc bien plus longue que cette distance en ligne droite. Tellement plus longue d'ailleurs, que nous pourrons la considérer comme étant infinie. Mais alors comment comparerons-nous la longueur de différentes côtes sauvages si elles ont toutes une longueur infinie?

Une possibilité consiste à promener sur la côte un compas d'ouverture $\eta$ prescrite, chaque pas commençant là où le précédent avait fini. La valeur de $\eta$ (degré de résolution), multipliée par le nombre de pas, donnera une longueur approximative $L(\eta)$. Si on répète l'opération en rendant l'ouverture du compas de plus en plus petite, on trouve que $L(\eta)$ tend à augmenter sans cesse, et sans limite bien définie. Lewis Fry Richardson(1) a étudié la variation de la longueur approchée $L(\eta)$ pour différentes côtes et frontières et est arrivé à la conclusion que $L(\eta)$ est proportionnel à $\eta^{\alpha}$. La valeur de l'exposant $\alpha$ dépend de la côte choisie. Mandelbrot(2) interpréta le résultat empirique de Richardson en donnant à $1 + \alpha$ la signification d'une *dimension fractale*.

*En mesurant le périmètre d'un cercle à l'aide d'un compas d'ouverture de plus en plus petite, on obtient une longueur qui tend vers une limite bien définie*

**Exercice 1**

On mesure la longueur $L$ de la côte d'une île circulaire de rayon unité à l'aide d'un compas. On effectue six fois la mesure en adoptant successivement, pour l'ouverture $\eta$ du compas, une longueur égale au côté de polygones inscrits. Quelle longueur obtient-on dans chaque cas ?

a) Complétez le tableau ci-dessous:

| Ouverture du compas | $L$ | Log($\eta$) | Log($L$) |
|---|---|---|---|
| côté du pentagone | | | |
| côté de l'hexagone | | | |
| côté de l'octogone | | | |
| côté du décagone | | | |
| côté du dodécagone | | | |
| côté de l'icosagone | | | |

b) Reportez le logarithme de la longueur $L$ en fonction du logarithme de l'ouverture $\eta$.

*En mesurant la longueur d'une côte à l'aide d'un compas d'ouverture de plus en plus petite, on n'obtient pas de limite bien définie, mais un procédé graphique simple permet de déterminer la dimension fractale de la côte*

**Exercice 2**

On mesure la longueur de différentes côtes (voir feuille annexée) à l'aide d'un compas. On effectue trois fois la mesure pour chaque côte en adoptant successivement, pour l'ouverture $\eta$ du compas, une longueur égale à:

- 64 fois la longueur du plus petit segment rectiligne
- 16 fois la longueur du plus petit segment rectiligne
- 4 fois la longueur du plus petit segment rectiligne
- 1 fois la longueur du plus petit segment rectiligne.

a) Quelle longueur $L$ obtient-on dans chaque cas si on admet une longueur unité pour le plus petit segment ?

b) Reportez, pour chaque côte, le logarithme de la longueur $L$ en fonction du logarithme de l'ouverture $\eta$ du compas. Déduisez du graphique la dimension fractale de chacune des côtes.

(1) Richardson, L. F. (1961). The problem of contiguity : an appendix of statistics of deadly quarrels. *General Systems Yearbook* **6**, 139-187.
(2) B. Mandelbrot (1967). How long his the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* **155**, 636-638.

*Prochaine réunion: lundi 6 mars 1995 à 17h.*