Club Math

Lundi 8 mai 1995 à 17 h

Vérité et consistance

Bernard Vuilleumier

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur:
Raymond Morel

Lettre nº 40

Pendant plus de 2000 ans, les postulats d'Euclide ont été tenus pour des assertions vraies dans l'espace

En 1931, un jeune mathématicien de 25 ans, Kurt Gödel, publiait un article(1) qui démontrait l'*incomplétude* de tout système axiomatique contenant la théorie des nombres. Les résultats de cet article, pour citer Gödel lui-même, sont les suivants: «Dans tout système formel consistant contenant une théorie des nombres finitaire relativement développée, il existe des propositions indécidables» et «de plus, la consistance d'un tel système ne saurait être démontrée à l'intérieur de ce système».

Avant la parution de l'article de Gödel, il était tacitement admis que chaque domaine de la pensée scientifique pouvait être construit sur le modèle de la géométrie d'Euclide: quelques axiomes permettent de démontrer un nombre infini de propositions. Si la vérité des axiomes peut être établie, la vérité de tous les théorèmes est du même coup garantie. Et comme les postulats d'Euclide étaient tenus pour des assertions vraies de l'espace, on considérait les théorèmes de la géométrie d'Euclide comme vrais.

Ce n'est qu'au XIX^e siècle, avec les travaux de Gauss, Bolyai, Lobatchevski et Riemann qu'on se rendit compte qu'il était possible de construire de nouvelles géométries en utilisant des axiomes différents de ceux d'Euclide, et même incompatibles avec eux. La question n'était alors plus de savoir si les axiomes et les théorèmes étaient vrais – ils ne l'étaient manifestement pas dans l'espace ordinaire – mais si les théorèmes étaient bien les conséquences logiques nécessaires des axiomes. Et il devint crucial de savoir si un ensemble donné d'axiomes servant de fondement à un système était consistant, c'est-à-dire s'il excluait que l'on puisse déduire des théorèmes contradictoires.

Ce n'est qu'au XIX^e siècle, qu'on découvrit des géométries dont les axiomes n'étaient plus vrais dans l'espace

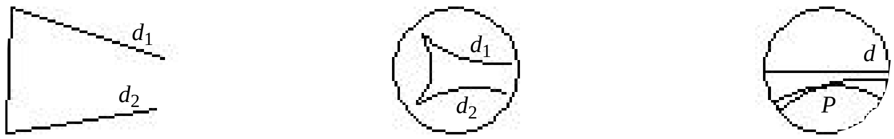

Fig. 1: Le cinquième postulat d'Euclide dit que «si une droite, tombant sur deux droites d_1, d_2, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées indéfiniment, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits». Dans le plan hyperbolique, les deux «droites» ne se rencontrent pas et il est possible de faire passer deux «parallèles» à d par un point P.

Pour tenter de résoudre le problème de la consistance, les mathématiciens imaginèrent une méthode qui consiste à trouver un «modèle» des axiomes d'un système, de telle sorte que chaque axiome se transforme en une assertion vraie dans ce modèle (comme les postulats de la géométrie euclidienne se transformaient en assertions vraies dans l'espace, qui jouait alors le rôle de modèle). Mais cette méthode présente un inconvénient majeur: soit elle fait appel à des modèles composés d'une infinité d'éléments pour interpréter les axiomes et il devient impossible de valider le modèle à l'aide d'un nombre fini d'observations; soit elle recourt à des modèles finis dans lesquels il n'est guère possible de refléter que des systèmes d'axiomes de maigre importance.

C'est alors que se posa le problème de la consistance: comment être sûr qu'un système d'axiomes exclut la possibilité de déduire des théorèmes contradictoires

A la fin du XIX^e siècle, Peano proposa un système qui axiomatisait l'arithmétique des nombres cardinaux. En attendant Gödel, les crédules crurent que ce système était complet et consistant, c'est-à-dire que ses axiomes étaient suffisants pour engendrer toutes les «vérités» arithmétiques sans jamais laisser apparaître de contradiction. Mais l'article de Gödel montre qu'il existe des propositions arithmétiques vraies que l'on ne saurait déduire formellement d'un quelconque système d'axiomes à l'aide d'un ensemble fini de règles d'inférences, et que la consistance de l'arithmétique ne saurait être démontrée dans l'arithmétique même.

Travaux pratiques

Pour fixer un peu de vocabulaire

Exercice 1

a) Qu'est-ce qu'un système formel? A quoi sert-il? Enumérez ses différents constituants.
b) Dans quel cas dit-on d'un système formel qu'il est complet? consistant?
c) Donnez un exemple de système formel complet et consistant.
d) Commentez le célèbre aphorisme de Bertrand Russel: «les mathématiques pures sont cette discipline où on ne sait pas de quoi on parle ni si ce qu'on dit est vrai»

En guise d'introduction aux systèmes formels ...

Exercice 2

Le système pg de Douglas Hofstadter est défini par

- un alphabet de 3 signes(deux lettres et un tiret): p, g, –
- une définition des axiomes: *x*p–g*x*- est un axiome si *x* est composé uniquement de tirets
- une règle d'inférence: supposons que *x*, *y* et *z* représentent chacun des chaînes particulières composées uniquement de tirets, et que *x*p*y*g*z* soit un théorème. Alors *x*p*y*-g*z* - est aussi un théorème.

a) Donnez explicitement des axiomes du système pg.
b) Construisez quelques théorèmes.
c) Trouvez un «modèle» de ce système de telle sorte que chaque axiome se transforme en une assertion vraie dans ce modèle.

Et pour se familiariser avec la notion d'interprétation

Exercice 3

Modifions la définition des axiomes du système pg de Douglas Hofstadter: *x*p–g*x* est un axiome si *x* est composé uniquement de tirets. Comment peut-on alors réinterpréter ce système pour que tous les axiomes se transforment en assertions vraies dans le modèle?

Pour illustrer la notion de modèle en mathématiques

Exercice 4

Illustrez le cinquième postulat d'Euclide et donnez ensuite un «modèle» euclidien de:
a) la géométrie hyperbolique obtenue en remplaçant ce 5^{e} postulat par: «par n'importe quel point donné hors d'une droite, on peut tracer *au moins deux parallèles* à cette droite».
b) la géométrie de Riemann obtenue en remplaçant le 5^{e} postulat d'Euclide par: «par n'importe quel point donné hors d'une droite, on ne peut mener *aucune parallèle* à cette droite».

Pour introduire l'idée de raisonnement métamathématique

Exercice 5

Si un système d'axiomes n'est pas consistant, toute formule est un théorème, ce qui revient à dire qu'à partir d'un ensemble non consistant d'axiomes, il est possible d'obtenir n'importe quelle formule. Mais s'il existe au moins une formule qui n'est pas un théorème, alors le calcul est consistant.

Esquissez une démonstration qui utilise ce qui précède et qui établit que le système d'axiomes du calcul propositionnel donné par les quatre formules ci-dessous est consistant.

1. $(p \quad p) \quad p$	si ou *p* ou *p*, alors *p*
2. $p \quad (p \quad q)$	si *p*, alors ou *p* ou *q*
3. $(p \quad q) \quad (q \quad p)$	si ou *p* ou *q*, alors ou *q* ou *p*
4. $(p \quad q) \quad ((r \quad p) \quad (r \quad q))$	si(si *p*, alors *q*), alors(si(ou *r* ou *p*), alors (ou *r* ou *q*))

(1) Kurt Gödel, Uber formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und vervandter Systeme I, *Monatschefte für Mathematik und Physik* (Vienna), **38** (1931), 173-198.

Prochaine réunion: lundi 4 septembre 1995 à 17 h.