

L'infini

Bernard Vuilleumier

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur:
Raymond Morel

Lettre n° 51

*L'infini est apparu à diverses
époques du développement
des mathématiques*

*Aristote se demande déjà si
la fragmentation infinie
d'une grandeur finie existe*

*A la Renaissance, la traduction
et la diffusion des œuvres
d'Archimède amorce la nais-
sance du calcul infinitésimal*

*Mais il faudra attendre la
théorie sur l'infini de Cantor
pour disposer d'un concept
rigoureusement défini*

L'infini est apparu à diverses époques du développement des mathématiques. Aristote se demande déjà si la fragmentation infinie d'une grandeur finie existe. Archimède fait usage d'un processus infini d'exhaustion pour assimiler du droit à du courbe. A la Renaissance, la traduction et la diffusion des œuvres d'Archimède amorcent la naissance du calcul infinitésimal dans lequel la notion d'infini est systématiquement présente. Mais cet engagement de l'infini provoque aussitôt des difficultés considérables : qu'est-ce qu'une somme comme celle que ce calcul exige ? S'agit-il d'une somme infinie d'éléments infiniment petits, d'une somme finie d'éléments infinitésimaux ou bien d'une somme finie d'éléments infimes mais finis ? Le calcul et ses habiletés domineront les justifications conceptuelles, insuffisantes ou absentes jusqu'à l'élaboration rigoureuse – par Dedekind et Cantor à la fin du XIX^e siècle – du concept d'infini.

Les ensembles infinis ont des propriétés curieuses. Un *ensemble infini* peut être mis en correspondance biunivoque avec un de ses sous-ensembles stricts. Ce fait était déjà connu de Galilée qui avait remarqué que les carrés des nombres entiers positifs pouvaient être mis en bijection avec les entiers positifs eux-mêmes. Cela semble entrer en contradiction avec l'intuition qui veut qu'un ensemble est toujours plus grand que chacune de ses parties. Il est donc important de comprendre exactement ce que signifie «plus grand que» ou «plus petit que» lorsque ces expressions sont appliquées à des ensembles infinis *A* et *B*. Nous dirons que *B* est plus grand que *A* ou que *A* est plus petit que *B* lorsque les deux conditions suivantes sont remplies : *A* peut être mis en *bijection* avec un sous-ensemble de *B*, *A* ne peut pas être mis en bijection avec *B* tout entier.

Pour édifier sa théorie sur l'infini, Cantor devait apporter une réponse à la question fondamentale suivante : deux ensembles infinis sont-ils nécessairement de la même «taille» (les mathématiciens parlent de la *puissance* ou du *cardinal* d'un ensemble plutôt que de sa taille), ou bien des ensembles infinis peuvent-ils être de tailles différentes ? En 1874, Cantor prouve que l'ensemble infini des nombres transcendants n'est pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être mis en bijection avec l'ensemble des entiers positifs. En 1877, il introduit la notion de puissance d'un ensemble afin de pouvoir comparer entre eux les ensembles usuels de l'analyse. Il arrive alors à des résultats stupéfiants et tout à fait contraires à l'intuition, comme par exemple la possibilité d'établir une bijection entre le continu à une dimension et le continu à *n* dimensions. «Je le vois, mais je ne le crois pas», écrit-il à Dedekind. En 1883, il exhibe un ensemble constitué d'une poussière de points mais possédant la puissance du continu.

Tous les ensembles infinis dénombrables, par exemple l'ensemble des entiers, l'ensemble des nombres rationnels, l'ensemble des nombres algébriques, sont équivalents entre eux et ont donc la même puissance, notée \aleph (aleph). Il existe aussi des ensembles non dénombrables équivalents entre eux. L'ensemble de Cantor, l'ensemble des points d'un segment, l'ensemble des nombres réels, l'ensemble des points du plan par exemple sont équivalents entre eux : ils ont la puissance du continu, notée \mathfrak{C} .



Fig. 1 : Principe de construction de l'ensemble de Cantor: on part du segment unité [0, 1] et on retire l'intervalle ouvert]1/3, 2/3[; on retire ensuite le tiers central de chaque segment restant et on répète indéfiniment le procédé. L'ensemble des points qui subsistent, quel que soit le nombre de répétitions opérées, est appelé ensemble de Cantor. Cet ensemble a la puissance du continu!

Travaux pratiques

Mots clefs

infini, limite, ensemble infini, bijection, puissance, cardinal.

Pour apprendre à réfuter un argument de Zénon d'Élée

Exercice 1

Pour établir l'absurdité du mouvement, Zénon d'Élée (c. 500 avant J.-C.), imagine l'argument suivant : si la tortue a de l'avance sur Achille, celui-ci ne pourra jamais la rattraper, quelle que soit sa vitesse; car, pendant qu'Achille court pour atteindre le point d'où est partie la tortue, celle-ci avance de telle sorte qu'Achille ne pourra jamais annuler cette avance. Comment réfutez-vous cet argument?

Pour formuler la méthode d'exhaustion d'Eudoxe en utilisant la notion de limite

Exercice 2

La méthode d'exhaustion, que les Grecs ont utilisé pour démontrer des théorèmes sur les aires et les volumes de figures curvilignes, repose sur la proposition suivante : si de toute grandeur on soustrait une partie supérieure ou égale à sa moitié, et si l'on continue ce procédé de subdivision, il restera une grandeur plus petite que toute grandeur donnée de la même espèce. Formulez cette proposition en langage mathématique en utilisant le concept de limite.

Pour se familiariser avec les propriétés étranges des ensembles infinis

Exercice 3

Prouvez que, quand un ensemble est infini, quel que soit l'entier naturel n , si nous enlevons n éléments de l'ensemble, il en reste toujours une infinité.

Où l'intuition qui veut qu'un ensemble soit toujours plus grand que chacune de ses parties est mise en défaut

Exercice 4

- Supposons que A est un sous-ensemble strict de B , ce qui signifie que B contient tous les éléments contenus dans A , plus des éléments supplémentaires qui ne sont pas contenus dans A . Montrez que lorsque A et B sont des ensembles infinis, on ne peut pas conclure de ce qui précède que A est plus petit que B .
- Décrivez le procédé géométrique de construction de l'ensemble de Cantor. Dressez une liste de points correspondant aux extrémités des intervalles générés par ce processus et exprimez l'abscisse de ces points en base 3.
- Esquissez un arbre illustrant le développement de nombres de l'intervalle unité en base 3. En vous souvenant que $0.1_3 = 0.02_3$, essayez de caractériser les points qui appartiennent à l'ensemble de Cantor à partir de leur développement en base 3.
- Une erreur fréquente consiste à penser que l'ensemble de Cantor ne contient que les points qui se trouvent aux extrémités des intervalles générés par le processus de construction. Donnez un exemple de point appartenant à l'ensemble de Cantor mais qui n'est pas à une des extrémités d'un des intervalles.
- Démontrez qu'il y a autant de points dans l'ensemble de Cantor que dans le segment unité, en d'autres termes, que ces deux ensembles ont la même puissance, celle du continu.

Prochaine réunion: lundi 4 novembre 1996 à 17h.