Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur:
Raymond Morel

Lettre nº 52

Lundi 4 novembre 1996 à 17 h

Déformations et dimensions

Bernard Vuilleumier

La topologie est la branche des mathématiques qui s'occupe de *déformations*. Elle traite de la question des formes d'un point de vue qualitatif et utilise des notions telles que celles de *dimension*, de *bijection* et de *continuité*. Elle examine comment des objets qui seraient en caoutchouc peuvent se déformer. En topologie, les lignes droites peuvent être incurvées, les cercles peuvent être déformés en triangles ou en carrés. D'un point de vue topologique par exemple, une ligne droite et une courbe de Koch ne peuvent pas être distinguées; un cercle et une île de Koch sont équivalents; une feuille de papier plane est identique à une feuille infiniment froissée. Mais tout n'est pas équivalent en topologie. Les intersections de droites demeurent des intersections, quelle que soit la déformation envisagée : on ne peut ni les faire disparaître ni les faire apparaître en étirant, contractant ou torsadant des droites. De même, le nombre de trous dans un objet est invariant:on peut bien déformer une sphère en un fer à cheval – figures sans trou – mais pas en un tore – figure à un trou. Les transformations autorisées sont appelées des *homéomorphismes.* Ce sont les applications bijectives continues qui ont un inverse continu. Lorsqu'elles sont appliquées, elles ne changent pas les propriétés invariantes des objets.

Nous avons tous une idée intuitive de la notion de dimension : la dimension d'un objet est le nombre de coordonnées ou paramètres indépendants nécessaires pour donner une description unique de ses points. Ainsi, une ligne a la dimension 1, un carré la dimension 2 et un cube la dimension 3. Dès les premiers développements de la topologie, les mathématiciens ont pensé que la dimension d'un objet devait être invariante, mais ils se sont heurtés à de sévères difficultés. En 1878, Cantor trouve une *transformation bijective* qui applique l'intervalle unité $[0, 1]$ sur le carré unité $[0, 1]\times[0, 1]$. En 1890, Peano[1], puis Hilbert[2] en 1891, proposent des courbes qui remplissent le plan et qui correspondent à des *transformations continues* de l'intervalle unité sur le carré unité. Il était dès lors possible de décrire les points du carré unité à l'aide d'un seul paramètre ! La question se posa de savoir si une ligne et un carré étaient topologiquement équivalents, en d'autres termes peut-on transformer un cube unité à m dimensions en un autre cube unité à n dimensions – lorsque m est différent de n – à l'aide d'une application bijective continue et dont l'application inverse est aussi continue?

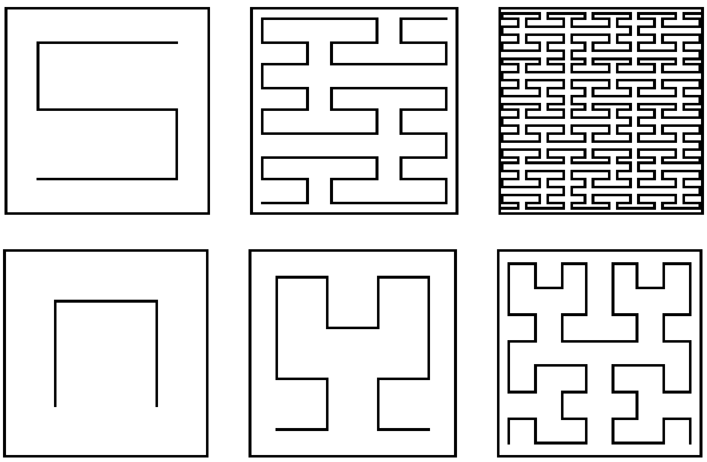

Fig. 1: Trois premières étapes de la construction de courbes continues remplissant le plan. En haut, courbe de Peano, en bas courbe de Hilbert.

(1) G. Peano, Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. *Math. Ann.* ***36***, (1890) 157-160.
(2) D. Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Fläschenstück. *Math. Ann.* ***38***, (1891) 459-460.

La topologie est la branche des mathématiques qui s'occupe de déformations. Elle examine comment des objets qui seraient en caoutchouc peuvent se déformer

Dès les premiers développements de la topologie, les mathématiciens ont pensé que la dimension d'un objet devait être invariante…

Mais Cantor trouve une transformation bijective qui applique l'intervalle unité sur le carré unité. Peano et Hilbert proposent des courbes continues qui remplissent le plan…

La question se pose alors de savoir si une ligne et un carré ont la même dimension

Travaux pratiques

Mots clefs
déformation, dimension, bijection, continuité, homéomorphisme.

Pour construire une bijection entre l'intervalle unité et le carré unité

Exercice 1
Pour obtenir une application bijective f entre l'intervalle unité et le carré unité nous procédons ainsi: étant donné un nombre réel r appartenant à l'intervalle unité, nous l'écrivons en base 2. Nous concaténons les chiffres de ce développement occupant des positions paires pour former un nombre binaire p et ceux se trouvant aux positions impaires pour former un nombre binaire i. Nous associons à r l'image $f(r) = (p, i)$. Nous posons d'autre part $f(1) = (0, 1)$.

a) Définissez la fonction $f(r)$ à l'aide de *Mathematica*.

b) Donnez l'image par f des nombres réels {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.};

c) Donnez l'image par f des ensembles de nombres réels ci-dessous:
{0, 1}, {0, 1/2, 1}, {0,1/4, 2/4, 3/4, 1}, {0, 1/8, 2/8, 3/8, 4/8, 5/8, 6/8, 7/8, 1},…

d) Dessinez quelques approximations de la fonction f en reliant par des segments les images des ensembles de nombres ci-dessus.

e) La bijection de Cantor f permet-elle de conclure que l'intervalle unité est équivalent au carré unité et que leur dimension est la même?

Pour définir une fonction continue entre l'intervalle unité et le carré unité

Exercice 2
a) Donnez les adresses des subdivisions obtenues à la troisième étape de la construction d'une courbe de Hilbert.

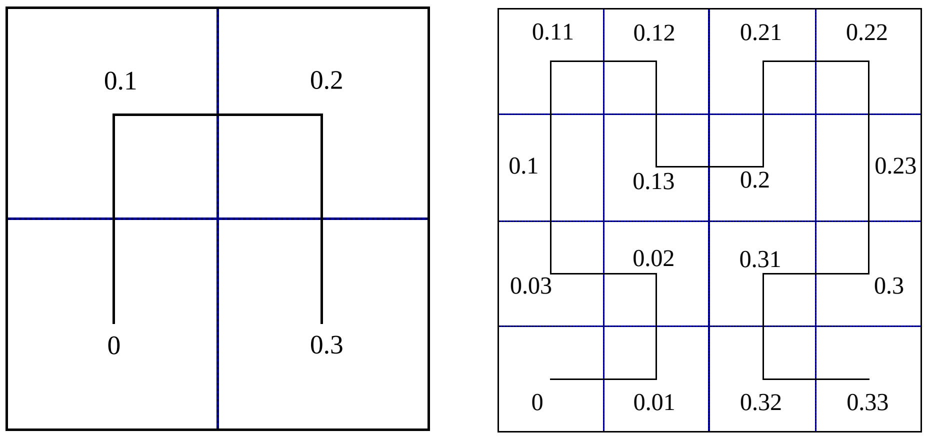

Fig. 2: Adressage des subdivisions obtenues lors des deux premières étapes de la construction géométrique d'une courbe de Hilbert. En divisant la surface initiale en carrés toujours plus petits et en attribuant à chacun d'eux une adresse numérique écrite en base 4 selon ce procédé, on définit une courbe continue.

b) Démontrez, en utilisant le système d'adressage illustré ci-dessus, que le procédé géométrique de construction de la courbe de Hilbert conduit à une fonction limite $H(r)$ qui est continue.

c) L'application $H(r)$ est-elle bijective?

Prochaine réunion: lundi 2 décembre 1996 à 17h.