Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur:
Raymond Morel

Lettre nº 55

La consonance a été mise en relation avec les mathématiques dès l'Antiquité grecque

La recherche de sonorités simples et pures a longtemps été l'objectif principal des théoriciens de la musique

Aujourd'hui, les théoriciens des mathématiques se mettent à l'écoute des nombres …

Car pour mettre en évidence certaines propriétés, l'oreille est plus performante que l'œil

Lundi 3 février 1997 à 17 h

Ecouter des nombres

Bernard Vuilleumier

La musique et les mathématiques entretiennent depuis fort longtemps une relation privilégiée. Nous sommes redevables à l'Antiquité grecque d'une découverte essentielle qui reste, aujourd'hui encore, la seule base solide que l'on ait jamais pu assigner à l'analyse du fait musical: il s'agit de la relation entre le *phénomène intuitif de consonance,* c'est-à-dire l'impression subjective d'affinité que donne la perception de certains sons par rapport à d'autres, et l'expression mathématique du *rapport entre les nombres* caractérisant ces mêmes sons. La recherche de sonorités simples et pures, seules susceptibles d'une perception claire et d'une notation précise, a dès lors été l'objectif principal des théoriciens de la musique. Cet état d'esprit a subsisté jusqu'à la fin du XIX^{e} siècle et Littré donne de la musique la définition suivante: «Science ou emploi des sons qu'on nomme rationnels, c'est-à-dire qui entrent dans une échelle dite gamme».

Les sons consonants ont été perçus par l'oreille avant de recevoir une traduction mathématique. Le passage des sons aux nombres s'est fait par de constantes confrontations entre l'art et les constructions de l'esprit. Le sentiment instinctif des premières consonances coïncide avec les rapports des premiers nombres appliqués aux *longueurs de cordes* vibrantes. C'est cette constatation qui fit naître la conviction que la musique était essentiellement une science mathématique. Cette conviction en entraîna une autre; la musique apparut comme une manifestation tangible des propriétés cachées du Nombre et de l'un de ses premiers mystères, celui de la Tétractys (ensemble des nombres 1, 2, 3 et 4). Pour les disciples de Pythagore, la musique devint une véritable *imago mundi*: en recherchant numériquement les propriétés du monocorde, on devait parvenir non seulement à la connaissance musicale, mais à celle de l'univers et de son «harmonie». Platon a laissé dans le Timée l'illustration la plus célèbre de cette conception.

Nous percevons un son lorsque l'air ambiant ébranle nos tympans. Les sons qui sont généralement considérés comme plaisants peuvent être décrits à l'aide de fonctions périodiques. Une corde par exemple, vibrant à une certaine fréquence, produit un son agréable qui peut être décrit par une fonction périodique. Mais toute fonction dont l'amplitude varie suffisamment rapidement peut être utilisée pour produire un son. Pour écouter un nombre, nous allons construire une fonction discrète à partir de l'expression décimale de ce nombre. Selon la nature de ce développement – période courte, période longue, pas de période – les fonctions obtenues donneront lieu à des sons différents qui caractériseront les nombres.

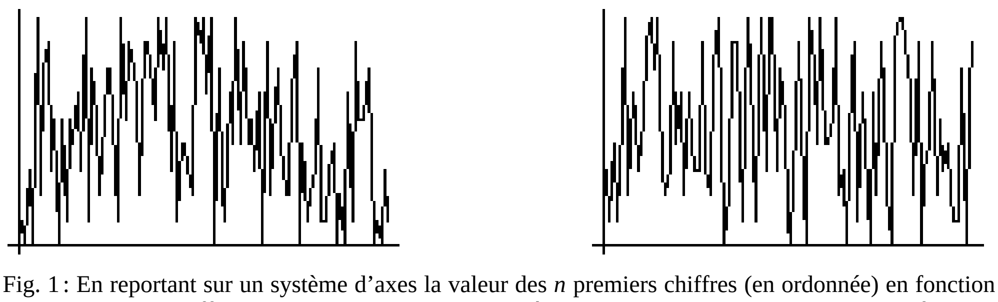

Fig. 1: En reportant sur un système d'axes la valeur des *n* premiers chiffres (en ordonnée) en fonction de la position des chiffres (en abscisse) de l'expression décimale d'un nombre, nous obtenons une fonction discrète que nous pouvons utiliser comme «échantillon» pour jouer le nombre. A gauche, fonction obtenue à partir de l'expression décimale du nombre rationnel 1/97. A droite fonction obtenue à partir de l'expression décimale du nombre irrationnel π. Visuellement, les deux fonctions se ressemblent, mais elles donnent lieu à des sons très différents.

Travaux pratiques

Mots clefs
Antiquité grecque, musique, mathématiques, nombre, son, gamme, consonance.

«Tout est connaissable par le nombre et rien ne peut être connu ou même conçu sans lui»
Philolaos

Exercice 1
a) De quel auteur Platon s'est-il inspiré pour écrire le *Timée* ?
b) Quelle était la profession de fois des pythagoriciens?
c) Comment la gamme pythagoricienne était-elle construite?

Pour illustrer les principes qui ont présidé à la construction de la gamme pythagoricienne

Exercice 2
Supposons qu'une corde de longueur $2l$ donne, en vibrant, la note *mi* (l'octave grecque allait de *mi* à *mi*). Une corde de longueur l donne le *mi* situé une octave au-dessus. Une corde de longueur égale à la moyenne harmonique $4l/3$ de ces deux longueurs donnera le *si*, et une corde de longueur égale à la moyenne arithmétique $3l/2$ le *la*.
a) Comment la moyenne harmonique divise-t-elle l'octave *mi-mi* ?
b) Comment la moyenne arithmétique divise-t-elle l'octave *mi-mi* ?
c) Calculez, en partant des longueurs $2l$ et l, les longueurs de corde donnant les notes *si*, *mi*, *la*, *ré*, *sol*, *do*, *fa* en utilisant une moyenne harmonique, puis des moyennes arithmétiques. **N.B.** Les notes obtenues par ce procédé forment la gamme de Pythagore. Les longueurs obtenues doivent toujours être comprises entre $2l$ et l pour que les notes se trouvent dans l'octave de départ.

Où l'oreille prend sa revanche sur l'œil

Exercice 3
Reportez sur un système d'axes la valeur des n premiers chiffres (en ordonnée) en fonction de la position de ces chiffres (en abscisse):
a) de l'expression décimale d'un nombre rationnel ;
b) de l'expression décimale d'un nombre irrationnel.
c) Construisez une fonction discrète constituée des 7418 premiers chiffres de l'expression décimale d'un nombre.
N.B. 7418 est la fréquence d'échantillonnage du logiciel *Mathematica.* Une fonction discrète comportant ce nombre de points produit un son d'une durée d'une seconde.
d) Jouez les fonctions obtenues pour différents nombres.

Prochaine réunion: lundi 3 mars 1997 à 17h.