Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre nº 59

Lundi 1er septembre 1997 à 17 h

La mesure et l'erreur

Bernard Vuilleumier

La différence entre la valeur expérimentale et la valeur «vraie» est l'erreur absolue

L'erreur absolue ne suffit pas à elle seule à caractériser la qualité d'une mesure

La mesure d'une distance de cent mètres à un centimètre près est de meilleure qualité que la mesure de un mètre à un centimètre près

La qualité d'une mesure s'obtient en comparant l'erreur absolue à la grandeur mesurée, ce qui fournit l'erreur relative

Dès qu'un phénomène d'apparence bien définie peut être quantifié de manière répétable et suffisamment précise, il est considéré comme une *grandeur*. Le rôle fondamental de la mesure est de caractériser l'état ou l'intensité d'un phénomène par un nombre. C'est sur cette mathématisation du réel que s'appuie la science. L'opération la plus simple est le dénombrement : il s'agit de compter des objets ou une succession de phénomènes tenus pour identiques (par exemple, les gouttes d'un liquide). Vient ensuite la définition d'une relation d'ordre entre grandeurs de même espèce: elle permet de repérer des valeurs d'une grandeur et de les ordonner selon une échelle numérique (par exemple, la température d'un corps). Enfin, la *mesure* demande qu'on sache définir la somme de deux grandeurs de même espèce. Cette sorte de grandeur est dite additive. On choisit une certaine valeur comme unité et l'on mesure la grandeur en effectuant le rapport entre la valeur observée et la valeur unitaire. En physique, la mesure dépend des instruments et des techniques utilisés. Pour pouvoir attribuer une signification objective à une mesure, il faut donc connaître le degré de précision de l'instrument ainsi que la marge globale des erreurs intervenant dans l'opération de la mesure.

La *précision* d'un instrument de mesure exprime la capacité que cet instrument a d'approcher la valeur «vraie» de la grandeur mesurée. Chaque appareil est ainsi caractérisé par sa classe de précision qui indique l'erreur en pourcentage de la graduation lorsque celle-ci commence à zéro ou à une valeur positive, ou de l'étendue de la graduation lorsque celle-ci s'étale de part et d'autre du zéro. La précision d'un instrument étant bien déterminée, il reste à évaluer les erreurs dues à la mesure elle-même. L'évaluation de ces erreurs et de leur résultante constitue le *calcul d'erreur* qui doit accompagner l'énoncé de tout résultat. On donnera par exemple le résultat d'une pesée en disant que telle masse a une valeur de 98,33g à 0,01g près. L'erreur absolue vaut alors 0,01g et l'erreur relative environ 1/10'000.

La connaissance d'une grandeur résulte généralement de l'application d'une formule ou relation entre cette grandeur et quelques autres dont la mesure est effectuée directement. Soit par exemple la grandeur $u = f(x, y, z, \ldots, t)$, fonction des grandeurs $x, y, z, \ldots, t$. Si l'évaluation numérique des grandeurs $x, y, z, \ldots, t$ est faite respectivement à $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta t$ près, la valeur de u sera aussi déterminée avec une certaine erreur Δu :

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \ldots, t + \Delta t) - f(x, y, z, \ldots, t)$$

Le but du calcul d'erreur est d'évaluer l'erreur Δu à partir des erreurs de mesure $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots, \Delta t$. Si les valeurs absolues des erreurs de mesure sont petites, nous pouvons remplacer l'accroissement total Δu de la fonction par la différentielle totale. Nous obtenons alors l'égalité approchée:

$$\Delta u \approx \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t$$

Les dérivées partielles et les erreurs de mesure peuvent être soit positives soit négatives. Remplaçons-les par leurs valeurs absolues. Nous trouvons alors une majoration de la valeur absolue de l'erreur qui affecte la grandeur calculée. Cette majoration s'exprime par l'inégalité :

$$|\Delta u| \le \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y| + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right||\Delta z| + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial t}\right||\Delta t|$$

Travaux pratiques

Mots clefs
Grandeur, dénombrement, relation d'ordre, mesure, précision, calcul d'erreur.

Pour définir quelques notions liées à la mesure

Exercice 1
a) Qu'est-ce qu'une grandeur en science?
b) Quel est le rôle fondamental de la mesure en science?
c) Qu'appelle-t-on précision d'un appareil de mesure?

Pour distinguer différentes acceptions du mot «mesure»

Exercice 2
La signification du mot «mesure» dans l'affirmation qui suit correspond-elle à celle qui lui est généralement attribuée en science: *«L'Homme est la mesure de toutes choses»* (Protagoras d'Abdère, 485-411 av. J.-C.)

Pour préciser les attributs possibles d'une grandeur

Exercice 3
L'expérimentation consiste à assigner des nombres aux grandeurs mises en jeu par un phénomène.
a) Quelle condition une grandeur doit-elle satisfaire pour être mesurable?
b) Donnez des exemples d'opérations qui assignent des nombres à des grandeurs et qui:
- ne sont pas véritablement des mesures;
- sont des mesures.

Pour illustrer la notion de «classe de précision» d'un appareil de mesure

Exercice 4
a) Vous lisez sur un voltmètre – de classe de précision 0,5 et gradué de 0 à 100 V – une tension de 70 volts.
b) Vous lisez sur un fréquencemètre – de classe de précision 0,2 et gradué de 40 à 60 Hz – une fréquence de 50 hertz.
c) Vous lisez sur un thermomètre – de classe de précision 0,1 et gradué de – 30° à + 50°C – une température de 15 degrés centigrades.
Quelle est l'erreur de mesure commise dans chaque cas et comment exprimez-vous les résultats?

Pour introduire les opérations de base du calcul d'erreur

Exercice 5
Soit la fonction $y = f(x) = a\,x^2$ et un petit accroissement Δx de la variable indépendante. Exprimez:
a) l'accroissement total Δy de la fonction;
b) la différentielle $dy = f'(x)\,\Delta x$ de la fonction;
c) la différence entre a) et b).

Pour réaliser une estimation numérique

Exercice 6
Vous souhaitez connaître la grandeur y donnée par la relation $y = 5t^2$. Vous évaluez numériquement $t = 0{,}45$ à $\Delta t = 0{,}01$ près. Calculez l'erreur qui affecte y en utilisant son accroissement total et sa différentielle.

Pour effectuer un calcul d'erreur relatif à une expérience de laboratoire

Exercice 7
Vous mesurez la longueur l et la période T d'un pendule. Vous obtenez $l = 1 \pm 0{,}005$ m et $T = 2 \pm 0{,}01$ s. Vous calculez l'accélération terrestre donnée par $g = 4\pi^2 l / T^2$. Quelle est l'erreur absolue maximale qui affecte votre résultat, et quelle est l'erreur relative?

Pour en savoir plus

Sources et bibliographie
Pierre MALIFAUD, article «Mesure» in Encyclopædia Universalis 1996 (15-11 a).
Georges NEY, article «Mesure – Méthodologie» in Encyclopædia Universalis 1996 (15-13 b).

Prochaine réunion: lundi 6 octobre 1997 à 17 h.