Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 60

Lundi 6 octobre 1997 à 17 h

Randonnées

Bernard Vuilleumier

Benoît Mandelbrot propose d'utiliser le mot «randonnée» pour désigner certains processus aléatoires

Le calcul des probabilités s'applique habituellement à des épreuves où chaque résultat possible est un nombre. Il permet par exemple de calculer l'éventualité d'obtenir *m* fois «pile» lors d'une épreuve consistant à lancer *n* pièces de monnaie. Mais il existe beaucoup de situations relevant de modèles aléatoires et qui sont d'une nature différente. Considérons l'évolution d'une rivière: une épreuve consiste à observer les débits au cours du temps. Un événement élémentaire (une éventualité) est alors une fonction qui, au temps t, associe le débit $x(t)$ à la date t. Comme autres exemples citons le développement d'une population (évolution de l'effectif en fonction du temps); la propagation d'une épidémie; l'évolution de la demande d'un bien par une clientèle; la variation du nombre de clients présents à un poste de service, etc. Ainsi, en physique, en biologie, dans les sciences humaines et même en musique, on est conduit fréquemment à s'intéresser à l'évolution de grandeurs au cours du temps où le «hasard» intervient à chaque instant.

Le modèle de la «marche au hasard» permet d'illustrer facilement ce type d'évolution où le hasard intervient à chaque étape : un mobile se déplace sur un axe Ox par pas d'une unité chaque fois dans l'un ou l'autre sens avec des probabilités égales. S'il fait un pas par unité de temps en partant de O à l'instant $t = 0$, il sera, à l'instant n, en un point P_n tel que:

$$\overline{OP_n} = x_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

Une marche où le hasard intervient à chaque pas par exemple est une randonnée

où les U_i sont des variables aléatoires indépendantes, chacune prenant les valeurs +1 ou –1 avec des probabilités égales. Francis Galton (1822-1911), explorateur, naturaliste et écrivain anglais a imaginé un dispositif expérimental permettant de réaliser des marches au hasard et d'étudier leur évolution au cours du temps. Il s'agit d'une planche verticale dans laquelle sont plantées de nombreuses rangées horizontales de clous. Par un entonnoir placé au haut de la planche, on fait dévaler des billes sur ce réseau de clous. Des tubes placés au bas de la planche recueillent les billes au terme de leur chute. Chaque fois qu'une bille heurte un clou, elle se déplace aléatoirement à gauche ou à droite. Le chemin suivi par chaque bille est impossible à prévoir, mais la distribution finale des billes dans les tubes se fait conformément à une loi, et ce avec d'autant plus d'exactitude que le nombre de rangées de clous est grand.

Galton a imaginé un dispositif expérimental simple permettant d'étudier les randonnées et de dégager une loi

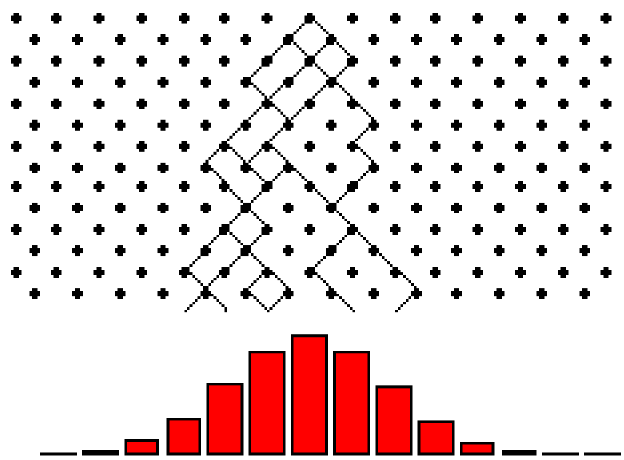

Fig. 1 : Trajets de billes chutant sur une planche à clous et distribution finale des billes dans les tubes.

Travaux pratiques

Mots clefs
Hasard, randonnée, planche de Galton, distribution, loi normale.

Pour introduire les notions d'épreuve, d'éventualité, ainsi que la distribution binomiale

Exercice 1
a) Vous lancez n pièces de monnaie. Quelle est l'éventualité d'obtenir m fois «pile»?
b) Calculez ces probabilités pour:
- $n = 3$; $m = 0$;
- $n = 3$; $m = 1$;
- $n = 3$; $m = 2$;
- $n = 3$; $m = 3$;

Pour appliquer le calcul des probabilités au cas du dé

Exercice 2
Vous lancez cinq fois un dé à six faces. Calculez la probabilité que le 6 n'apparaisse pas, apparaisse une fois, deux fois, trois fois, quatre fois, cinq fois.

Pour dégager quelques propriétés de la randonnée

Exercice 3
a) Faites effectuer une «marche au hasard» à une tour en la déplaçant d'un pas en avant ou d'un pas en arrière sur un échiquier selon que vous obtenez «pile» ou «face» en lançant n fois une pièce de monnaie.
b) Mesurez la distance entre le point de départ et la position finale.
c) Répétez plusieurs fois les points a) et b) et calculez, pour m randonnées:
- la distance moyenne;
- l'écart type.

d) Changez le nombre n de pas et reprenez les points a), b) et c).
e) Reportez, en fonction de n, les écarts types de m randonnées.
f) Cherchez la fonction qui permet d'obtenir au mieux ces valeurs.

Pour réaliser un dispositif expérimental permettant d'étudier la randonnée

Exercice 4
a) Construisez – à l'aide d'un morceau de bois, d'un marteau et de clous (ou d'une simulation informatique) – une planche de Galton.
b) Laissez tomber m billes au-dessus de la colonne centrale, recueillez-les après leur chute en plaçant des boîtes de part et d'autre de cette colonne au bas de la planche et comptez le nombre de billes contenues dans chaque boîte (voir fig. 1 au recto).
c) Etablissez un histogramme en reportant le nombre de billes contenues dans chaque boîte en fonction de la position de la boîte.

Sources et bibliographie
Maurice GIRAULT, article «Processus stochastiques» in *Encyclopædia Universalis,* 1996 (21 - 626).
Murray R. SPIEGEL, *Theory and Problems of Statistics*, McGraw-Hill Book Company, 1961

Prochaine réunion: lundi 3 novembre 1997 à 17 h.