Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre nº 61

Lundi 3 novembre 1997 à 17 h

Quérir la simplicité

Bernard Vuilleumier

A 11 ans déjà, Einstein trouvait que la preuve du théorème de Pythagore donnée par Euclide était inutilement compliquée

Lorsque Jacob Einstein enseignait la géométrie à son neveu Albert, alors âgé de 11 ans, le jeune Einstein trouvait déjà que certaines preuves données par Euclide étaient inutilement compliquées. Albert trouvait par exemple que la démonstration du théorème de Pythagore comportait beaucoup trop de lignes, d'angles et de carrés ajoutés au triangle rectangle d'hypoténuse c et de côtés a et b. Il imagina une preuve qui ne comportait qu'une seule ligne additionnelle: la hauteur élevée de l'hypoténuse c. Cette hauteur divise le triangle initial en deux triangles qui sont semblables entre eux et semblables au triangle initial (voir fig. 1).

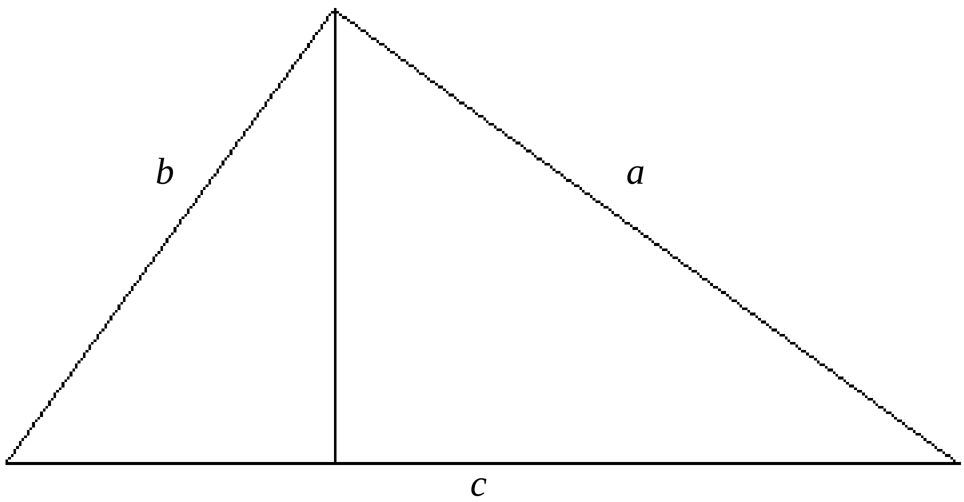


Fig. 1: Schéma imaginé par Einstein pour démontrer le théorème de Pythagore. Le schéma ne comporte qu'une seule ligne auxiliaire: la hauteur surmontant l'hypoténuse *c*. La démonstration s'appuie sur la similitude des triangles définis par cette ligne et du triangle initial.

Si nous désignons les aires des trois triangles semblables d'hypoténuses a, b, c, par E_a, E_b et E_c (de l'allemand «Ebene»: surface plane), nous pouvons écrire les trois équations:

$$E_a = ma^2 \tag{1}$$

$$E_b = mb^2 \tag{2}$$

$$E_c = mc^2 \tag{3}$$

où m est un facteur sans dimension différent de zéro qui garde la même valeur dans les trois équations (en géométrie euclidienne, le rapport des aires de figures semblables est égal au carré du rapport des dimensions linéaires des figures). Un simple coup d'œil sur la figure 1 nous fait voir que la surface du triangle d'hypoténuse c est égale à la somme des surfaces des triangles d'hypoténuses a et b:

Il imagina alors une preuve d'une grande simplicité qui mettait en évidence l'essence du théorème

$$E_a = E_b + E_c$$

or, d'après les équations (1) à (3):

$$ma^2 = mb^2 + mc^2$$

En divisant cette égalité par le facteur m, nous obtenons le résultat du théorème de Pythagore:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

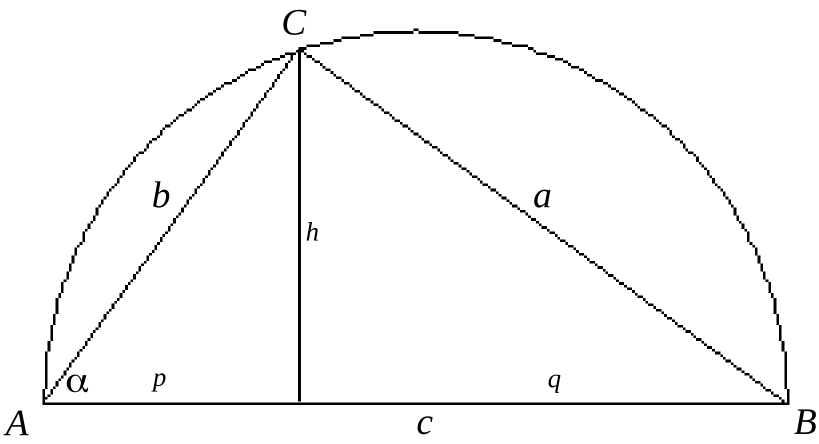
Cette démonstration illustre la quête de simplicité à laquelle Einstein s'est astreint sa vie durant. La simplicité conférait à ses yeux de la valeur à une théorie. Mais la grande beauté de la preuve d'Einstein ne réside pas tant dans sa simplicité que dans le fait qu'elle expose parfaitement les éléments essentiels du théorème de Pythagore: l'orthogonalité et la similitude.

Travaux pratiques

Mots clefs
Pythagore, géométrie, triangle rectangle, similitude.

Pour vérifier les propriétés du triangle rectangle

Exercice 1
Soit un triangle rectangle de sommets A, B, C :



a) Exprimez – en fonction de l'angle α, du rayon du cercle circonscrit et des coordonnées du centre de ce cercle – les coordonnées $\{x, y\}$ du sommet C.
b) Calculez les coordonnées de C pour les valeurs $A = \{0, 0\}$, $B = \{1, 0\}$ et $\alpha = \pi/3$.
c) Vérifiez les relations $a^2 = cq$ et $b^2 = cp$ où p et q sont les segments déterminés par la hauteur h élevée de l'hypoténuse c (théorème d'Euclide) ainsi que $h^2 = pq$ (théorème de la hauteur).

Pour dégager l'essence du théorème de Pythagore

Exercice 2
a) Démontrez que le rapport des aires de n'importe quels polygones réguliers semblables est égal au carré du rapport d'une dimension linéaire de ces figures.
b) Illustrez l'importance de l'angle droit dans la proposition de Pythagore.
c) Formulez une généralisation du théorème de Pythagore en utilisant la similitude.
d) Illustrez cette généralisation.

Pour appliquer la quête de simplicité au quotidien

Anecdote
Un jour, Einstein répondit à quelqu'un qui lui demandait s'il utilisait du savon à barbe pour se raser : «Comment ? Deux savons ? Un pour la toilette et un pour se raser ? Non, non, c'est trop compliqué».

Pour en savoir plus

Sources et bibliographie
Manfred SCHROEDER. - *Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise*. - New York: Freeman, 1991, pp. 3-4.
Gaston BACHELARD. - *Le rationalisme appliqué*. - Paris: PUF, 4e éd. 1970, pp. 86–97.

Prochaine réunion: lundi 1er décembre 1997 à 17 h.