Club Math

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 62

Dans un calcul numérique, les erreurs d'arrondi ne sont pas toujours négligeables

Le même calcul, effectué sur deux ordinateurs différents, peut donner des résultats différents

Ces circonstances rendent problématique la possibilité de prévoir l'évolution de certains systèmes

Il en va ainsi de l'évolution du climat, qui pourrait être modifiée par le battement d'ailes d'un papillon

Lundi 1er décembre 1997 à 17 h

L'effet papillon

Bernard Vuilleumier

Dans un calcul numérique, certaines sources d'erreurs sont souvent ignorées et l'on suppose trop souvent que les erreurs d'arrondi sont négligeables. Or cela est faux dans certains cas. Il est donc essentiel de sensibiliser les chercheurs à ce problème et de ne pas cacher cette difficulté aux étudiants. Nous allons montrer que les erreurs d'arrondis peuvent se manifester de plusieurs façons et qu'elles peuvent avoir des conséquences qui sont loin d'être négligeables.

Les ordinateurs et les logiciels ne représentent et ne manipulent pas tous les nombres de la même façon et dans le même ordre; deux calculs formellement identiques, mais effectués sur deux machines différentes (nous appellerons désormais «machine» le couple ordinateur + logiciel), peuvent donner des résultats différents. Dans le cas des systèmes dynamiques par exemple, où certaines opérations sont réitérées un grand nombre de fois, il arrive que les résultats obtenus par deux machines différentes, s'éloignent exponentiellement l'un de l'autre, rendant problématique la possibilité de prévoir l'évolution du système.

C'est le météorologue Edward Lorenz qui, au début des années soixante lors d'études portant sur l'évolution du climat terrestre, fit cette découverte. Le modèle simplifié qu'il utilisait comportait trois équations différentielles non linéaires et non intégrables. Pour résoudre ce type d'équations, il est nécessaire de recourir à une méthode numérique. Il en existe de nombreuses (Euler, Runge-Kutta, ...); comme elles sont différentes et qu'elles ne font pas intervenir les mêmes opérations arithmétiques en nombre et en ordre, les résultats dépendent de la méthode utilisée pour les obtenir. Ces résultats sont traditionnellement représentés sous forme de points dans un espace tridimensionnel; l'objet obtenu s'appelle l'attracteur de Lorenz. Edward Lorenz faisait imprimer par l'ordinateur les résultats qu'il obtenait; or un jour, il essaya de prendre, comme état initial, un état intermédiaire calculé et imprimé antérieurement. Il eut alors une grande surprise : les valeurs suivantes produites par ce nouveau calcul s'éloignaient progressivement, et de plus en plus vite, de celles obtenues précédemment. Il comprit la cause de ce phénomène : les valeurs imprimées par l'ordinateur n'étaient, en fait, que des valeurs approchées du contenu de sa mémoire. Ainsi naissait la sensibilité aux conditions initiales: le futur d'un système dynamique ne peut pas être connu parce que son état initial ne peut pas être fixé avec une précision absolue. La variation la plus infime – le battement d'ailes d'un papillon par exemple – sera progressivement amplifiée, et, deux états initiaux infiniment voisins de l'atmosphère s'éloigneront inexorablement l'un de l'autre pour donner naissance à deux histoires climatiques totalement différentes.

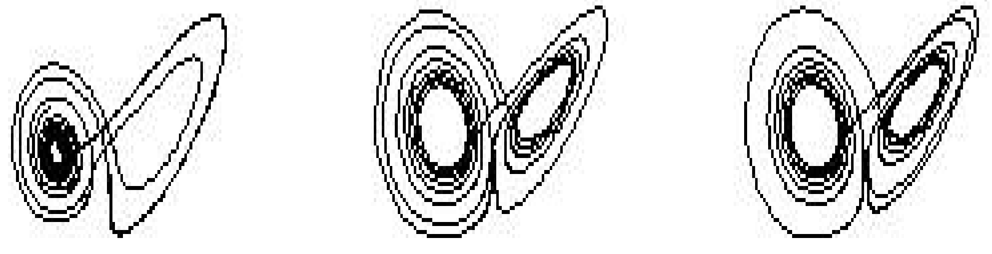

Fig. 1: Attracteur de Lorenz. Les trois figures ont été obtenues à partir des mêmes équations, des mêmes conditions initiales et de la même durée d'évolution. Seules les méthodes de résolution des équations diffèrent. Selon la méthode utilisée – de gauche à droite : Euler, Runge-Kutta d'ordre 2 et Runge-Kutta d'ordre 4 – l'attracteur revêt une allure différente. Le pas d'intégration est identique dans les trois cas.

Travaux pratiques

Les équations du modèle de Lorenz

Pour revivre la surprise éprouvée par Lorenz

Pour construire l'attracteur de Lorenz

Mots clefs
Système dynamique, sensibilité aux conditions initiales, modèle de Lorenz, attracteur.

Le modèle de Lorenz
En 1963, le météorologue Edward Lorenz met sur pied une description grossière du comportement de l'atmosphère lui permettant de faire des calculs sur l'ordinateur peu puissant dont il dispose à l'époque. Il décrit le comportement dynamique d'un fluide en convection à l'aide d'un modèle comportant trois équations différentielles ordinaires qui donnent le mouvement d'un point de coordonnées (x, y, z) dans l'espace:

$$dx/dt = Pr(y - x)$$
$$dy/dt = rx - xz - y$$
$$dz/dt = xy - bz$$

Ce système d'équations n'est pas intégrable dans le cas général. La détermination de ses solutions – qui correspondent à des trajectoires d'un point dans l'espace – doit se faire numériquement à l'aide d'un ordinateur, une fois fixés les trois paramètres b, Pr et r. Lorenz a utilisé les valeurs suivantes $Pr = 10$, $b = 8/3$, r positif variable. La quantité r est directement liée à la différence de température appliquée au fluide en convection et constitue le paramètre de bifurcation (voir lettre CM nº 34).

Exercice 1
a) Intégrez les équations du modèle de Lorenz pour les valeurs des paramètres et pour les conditions initiales suivantes: $Pr = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 20$, $t = 10$ et $\Delta t = 0.01$. Introduisez les valeurs de x, y et z obtenues comme nouvelles valeurs initiales et reprenez l'intégration pour une durée t =10. Relevez les résultats obtenus.
b) Intégrez les équations du modèle de Lorenz pour une durée $t = 20$. Relevez les valeurs de x, y et z obtenues et comparez-les aux résultats obtenus sous a). Explications.

Exercice 2
a) Intégrez les équations du modèle de Lorenz pour les valeurs des paramètres et pour les conditions initiales suivantes: $Pr = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$, $x_0 = 0.2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 20$, $t = 9.55$ et $\Delta t = 0.01$ en utilisant:
- la méthode d'Euler;
- la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2;
- la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

b) Dessinez l'attracteur à partir des valeurs obtenues dans chaque cas.

Sources et bibliographie
Pierre BERGE, Yves POMEAU, Christian VIDAL. - *L'ordre dans le chaos, 2^e éd.* - Paris: Hermann, 1988, 353 p.
James GLEICK. - *La théorie du chaos* - Paris: Albin Michel, 1989, 431 p.

Prochaine réunion: lundi 4 janvier 1998 à 17 h.