Club Math

http://www.ge-dip.etat-ge.ch/cip/clmath/welcome.html

Centre informatique pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n^{o} 64

Avant d'utiliser les nombres pour représenter le monde, l'homme a d'abord dû représenter les nombres eux-mêmes

Chaque civilisation s'est donné un «alphabet» particulier et des règles de formation pour représenter les nombres

La civilisation occidentale utilise un système de numération de position à base dix

Les chercheurs en calcul numérique informatique continuent à imaginer de nouvelles représentations

Lundi 2 février 1998 à 17 h

Représenter les nombres

Bernard Vuilleumier

Il y a de la sécurité dans les nombres. En exprimant numériquement le réel, nous découvrons des structures qui nous servent de guide pour explorer le monde dans lequel nous vivons et dont nous faisons partie. Les nombres sont en quelque sorte des symboles de pensée qui permettent d'accumuler de l'information sur notre environnement. Ils sont à la base de toutes les représentations scientifiques actuelles du réel. Mais avant d'utiliser les nombres pour représenter le monde, l'homme a d'abord dû représenter les nombres eux-mêmes!

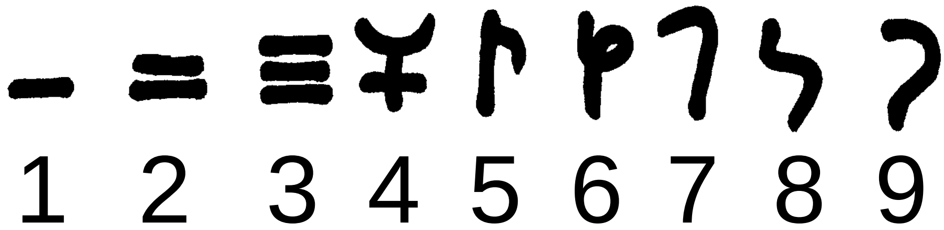

Fig. 1: Symboles indiens primitifs. Les chiffres arabes utilisés actuellement sont originaires de ces symboles.

Lorsqu'on veut représenter les nombres, la question se pose de les «nommer» oralement et par écrit. Il apparaît vite qu'il n'est pas possible d'inventer un nom pour chaque nombre indépendamment des précédents; il est encore moins possible de lui trouver un symbole pour l'écriture. Chaque civilisation s'est donc donné un «alphabet» particulier et des règles de formation pour les «mots», au sens de «combinaisons de symboles». Le système adopté actuellement par la civilisation occidentale utilise les symboles «0», «1», «2», «3», «4», «5», «6», «7», «8», «9» qui constituent l'alphabet à partir duquel on écrit les nombres en appliquant le principe dit de «numération de position» avec une base constante. Si la base est un entier naturel B, une unité de chaque ordre vaut B unités de l'ordre précédent. Tout entier naturel a peut s'écrire d'une manière et d'une seule sous la forme $a = a_0 + a_1B + a_2B^2 + \ldots + a_nB^n$ où les a_0, a_1, ..., a_n sont des entiers naturels strictement inférieurs à B et où a_n est non nul. La numération de position revient à représenter le nombre en écrivant seulement les coefficients de ce polynôme, mais tous les coefficients nuls ou non, de manière que leur place soit définie sans ambiguïté. Le système décimal est le système de numération de position où la base est dix, c'est-à-dire que les unités du deuxième ordre (les «dizaines») valent dix unités du premier ordre, les unités du troisième ordre (les «centaines») valent dix unités du deuxième ordre, etc.

Certains nombres – 1/3, $\sqrt{2}$, π, par exemple – ont un développement décimal infini, et la représentation de ce type de nombres ne peut se faire qu'à une certaine précision. En effectuant des opérations avec la représentation décimale de tels nombres, nous commettons donc des erreurs. La façon dont les erreurs se propagent dans un calcul dépend des opérations. Elle peut être décrite à l'aide d'une approximation linéaire de la fonction donnant les opérations effectuées. Dans certains cas – lors de la soustraction de deux nombres très proches l'un de l'autre par exemple – la perte de précision sur le résultat peut être dramatique. Le but des (bons) logiciels de calcul est de trouver une façon de représenter les nombres de manière à pouvoir certifier leur précision et déterminer l'erreur commise sur le résultat d'un calcul, et cela indépendamment de la façon dont il a été effectué et de l'ordinateur utilisé. La version 3 de *Mathematica* offre la possibilité d'obtenir le résultat d'un calcul à la précision demandée.

Prochaine réunion: lundi 2 mars 1998 à 17h.

Travaux pratiques

Mots clefs
Nombre, représentation, numération de position, base, développement, précision.

Pour illustrer différentes représentations d'un nombre

Exercice 1
a) Exprimez les nombres 128, 12.8, 1.5 et 15/10 en base deux.
b) Exprimez les résultats obtenus sous a) dans la base dix.
c) Selon la base dans laquelle ils sont exprimés, certains nombres peuvent avoir un développement fini ou infini. Donnez quelques exemples de tels nombres.

Pour trouver la précision de différents types de nombres

Exercice 2
Quelle est, pour *Mathematica*, la précision des nombres suivants:

a) Sqrt[2]
b) N[Sqrt[2],20]
c) Sqrt[2.0]
d) N[Sqrt[2.0],20]
e) 1.414
f) 1.41421356237309504880
g) 1.414213562373095 * Sqrt[2]
h) Sqrt[2]*Sqrt[2]

Pour établir la distinction entre «nombre machine» et nombre de précision arbitraire

Exercice 3
Lorsque vous saisissez un réel approché, *Mathematica* doit décider s'il faut le traiter comme un «nombre machine» ou comme un nombre de précision arbitraire. Si vous ne spécifiez pas que vous voulez travailler en précision arbitraire et si vous donnez moins de chiffres que `$MachinePrecision`, *Mathematica* traitera le nombre comme un «nombre machine». Quel est le type des nombres – machine ou de précision arbitraire – de l'exercice 2?

Pour introduire une nouvelle représentation des nombres réels approchés

Exercice 4
Comment procédez-vous pour indiquer à *Mathematica* que:
a) 123.12345678901234567890 doit être un nombre machine?
b) 123.456 doit comporter 100 chiffres?
c) 123.456 doit comporter 100 chiffres après le point décimal?
d) $123.456*10^6$ doit comporter 100 chiffres?
e) le nombre 0.1_3 en base 3 doit comporter 100 chiffres?
f) le nombre $0.1_3 * 3^2$ en base 3 doit comporter 100 chiffres?

Pour présenter les aptitudes numériques de Mathematica

Exercice 5
Quelle est la précision de chaque nombre et du résultat des opérations suivantes:
a) 1.11111111111111111111 – 1.11111111111111111000
b) 1.11111111111111111111345 – 1.11111111111111111000
c) 1 + x et $(x^2 – 1) / (x – 1)$ pour x = 0.99999999999999999999999999999900000
d) Comment faut-il procéder pour conserver la précision des nombres dans le résultat?

Sources et bibliographie
• John D. BARROW, *Pi in the Sky. Counting, Thinking and Being.* Oxford University Press 1992.
• Josette ADDA, article «Numération» 16-624b, *CD Universalis* v 2.0, 1996.
• Mark SOFRONIOU, Numerics in Mathematica 3.0, *The Mathematica Journal*, Vol. 6, Issue 4, Fall 1996.