Club Math

Lundi 2 mars 1998 à 17 h

Calcul numérique

Bernard Vuilleumier

http://www.ge-dip.etat-ge.ch/cip/clmath/welcome.html

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n^o 65

Les erreurs de calcul numérique informatique sont inévitables

Les erreurs de calcul numérique informatique sont inévitables, sauf dans les problèmes triviaux. Il peut s'agir d'erreur de troncature ou d'erreur de représentation. Les erreurs de troncature résultent d'une approximation d'un processus infini par un processus fini, par exemple l'approximation d'une intégrale définie par une somme finie. Les erreurs de représentation sont commises pour permettre à des valeurs non représentables exactement d'être représentées approximativement. L'erreur la plus fréquente de représentation est l'erreur d'arrondi:la plupart des nombres ne peuvent pas être représentés exactement et doivent être légèrement modifiés pour être représentés. Les erreurs de troncature (aussi appelées erreurs de méthode) sont dues à une représentation algorithmique erronée tandis que les erreurs d'arrondi résultent d'une représentation erronée des données. Ces erreurs étant inévitables, il est donc de la plus grande importance de savoir comment elles s'amplifient dans un calcul.

Pour tenter de quantifier l'amplification des erreurs, considérons une fonction d'une seule variable. Si $y = f(x)$, où x, y sont des valeurs correctes et Δx, Δy les erreurs sur ces valeurs, alors $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$. Le nombre $f'(x)$ est le facteur par lequel l'erreur sur x est multipliée pour produire l'erreur sur y. Depuis que les nombres se représentent en point flottant ($1.23*10^1$ au lieu de 12.3 par exemple), le facteur $f'(x)$ a perdu de son importance et a été remplacé par $x\, f'(x)/f(x)$ qui est la facteur par lequel l'erreur relative sur x est amplifiée pour produire l'erreur relative sur y. Cette approche, qui peut se généraliser aux fonctions de plusieurs variables, ne constitue qu'une approximation du premier ordre et ne permet pas d'analyser tous les problèmes. Mais elle est utile pour expliquer la propagation des erreurs.

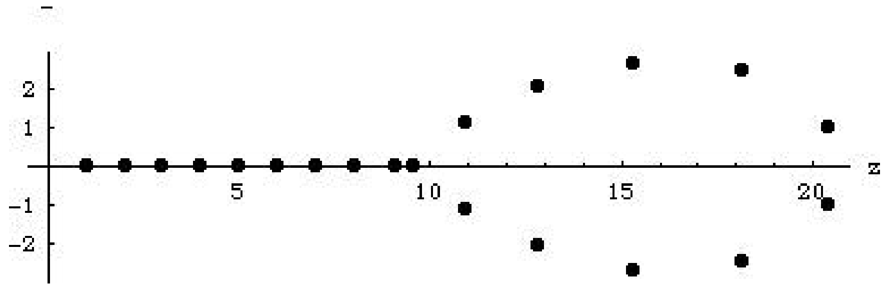

Fig. 1: Exemple d'amplification d'erreur. Les points représentent les zéros d'un polynôme $p(z) = (z-1)(z-2)\dots(z-20) = z^{20} - 210z^{19} + \dots + 20!$ dans lequel le coefficient de z^{19} est affecté d'une erreur de 10^{-7}.

Les opérations d'un calcul ne propagent pas seulement les erreurs: elles en introduisent

Les opérations d'un calcul numérique ne propagent pas seulement les erreurs d'arrondi: elles introduisent leurs propres erreurs de représentation et de troncature. Lorsque vous calculez avec des nombres de précision arbitraire, *Mathematica* garde la trace de la précision à chaque étape du calcul. En général, *Mathematica* essaie de vous fournir des résultats de la plus grande précision possible, compte tenu de la précision des entrées que vous lui avez fournies. Pour *Mathematica*, un nombre x de précision arbitraire possède un certain nombre de chiffres exactement connus, suivis d'un nombre infini de chiffres qui sont complètement inconnus. Lorsque vous effectuez un calcul, *Mathematica* garde la trace des chiffres qui peuvent être affectés par les chiffres inconnus de votre entrée, et il ajuste la précision afin qu'aucun chiffre affecté ne soit inclus dans le résultat. Cette procédure assure que tous les chiffres fournis par *Mathematica* sont corrects quelle que soit la valeur des chiffres inconnus.

Prochaine réunion: lundi 6 avril 1998 à 17 h.

Travaux pratiques

Mots clefs
Erreur, arrondi, représentation, troncature, propagation, précision.

Pour faire apparaître des erreurs d'arrondi

Exercice 1
Evaluez l'expression $x^2 - 2$ pour les valeurs suivantes:
a) x = Sqrt[2]
b) x = Sqrt[2.0]
c) x = 1.4142135623730950488016887242

Pour exhiber un cas particulier

Exercice 2
Evaluez les expressions suivantes:
a) 2 Sin[30.0 Degree] – 1
b) N[2 Sin[30 Degree]] – 1

Pour illustrer les effets des erreurs de troncature

Exercice 3
Effectuez les opérations suivantes:
a) Integrate[x Sqrt[x], {x, 0 , 25}]
b) NIntegrate[x Sqrt[x], {x, 0 , 25}]
c) Formez la différence entre le résultat obtenu sous a) et celui obtenu sous b).
d) Essayez de réduire l'erreur de troncature.

Pour mettre en évidence certaines limites des méthodes numériques

Exercice 4
Intégrez, pour x variant de 0 à l'infini:
a) en utilisant la fonction «Integrate»
b) en utilisant «NIntegrate»
les fonctions suivantes:
• $f(x) = e^{-x}$
• $f(x) = e^{-x} + e^{-(x-1000)^2}$
Comment pouvez-vous, dans le cas b), éviter l'erreur de troncature?

Pour examiner un cas d'amplification d'erreur

Exercice 5
Soit le polynôme $p(z) = (z-1)\,(z-2)\,\ldots\,(z-20) = z^{20} - 210\,z^{19} + \ldots + 20\,!$ dans lequel le coefficient de z^{19} est affecté d'une erreur de 10^{-7}.
a) Calculez l'erreur absolue $\Delta p(z)$ pour des valeurs de z variant de 1 à 20 par pas de 1.
b) Calculez l'erreur relative $\Delta p(z)/z$ pour des valeurs de z variant de 1 à 20 par pas de 1.
c) Calculez les zéros du polynôme lorsque le coefficient de z^{19} est affecté d'une erreur de 10^{-7}.
d) Dessinez ces zéros dans le plan complexe.

Pour en savoir plus

Sources et bibliographie

• Mark SOFRONIOU, Numerics in Mathematica 3.0, *The Mathematica Journal*, Vol. 6, Issue 4, Fall 1996.
• Wolfram Research, *Support & Services*, Introduction to Numerical Error. March 1997.