Club Math

http://www.ge-dip.etat-ge.ch/cip/clmath/welcome.html

Centre informatique
pédagogique (CIP)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 67

Lundi 4 mai 1998 à 17 h

Ordres de grandeur

Bernard Vuilleumier

Le changement d'ordre de grandeur intervient dans de nombreuses situations

Presque toutes les sciences, de l'astronomie à la sociologie, en passant par la physique, la chimie, la biologie et même simplement la vie quotidienne, sont dominées par le fait que des phénomènes perceptibles et hiérarchisables résultent de l'accumulation de microphénomènes imperceptibles. Il est possible par exemple de distinguer un pauvre d'un riche. Et tout le monde s'accordera sur la proposition suivante: «un franc de plus ne permet pas à un pauvre de devenir riche». Si nous rencontrons un homme sans le sous et que nous lui donnons un franc, il n'en devient pas riche pour autant, même si nous lui donnons un franc chaque fois que nous le rencontrons. Selon la proposition initiale, le pauvre ne sera jamais riche. Mais, s'il finit par posséder une très grande somme, il pourra indubitablement être qualifié de riche! A partir de quelle somme le pauvre est-il devenu riche? Autre exemple: chacun est capable de faire la distinction entre un tas de sable et une taupinière et personne ne contestera que «enlever un grain de sable au tas ne modifie pas son aspect». Mais, si nous réitérons le processus, le tas finira bien par ressembler à une taupinière! A quelle étape le tas change-t-il d'aspect? Le changement d'ordre de grandeur intervient aussi dans de nombreux phénomèmes d'évolution. Un enfant n'est pas un adulte et un grand père est un adulte. Mais où se situe la frontière? Il est possible de décider qu'un certain âge est la limite entre les deux catégories. La majorité légale est fixée à 18 ans par exemple. Ce type de réponse a le défaut d'introduire l'arbitraire. De plus il entre en contradiction avec une propriété généralement bien acceptée: lorsque deux objets peuvent avoir différents ordres de grandeur, si la différence entre eux est très petite, c'est que les deux objets sont du même ordre de grandeur.

L'analyse classique ne propose pas les concepts qui modélisent efficacement de telles hiérarchies

L'analyse classique ne propose pas les concepts qui modélisent efficacement de telles hiérarchies à frontière floue, et la notion de limite est un détour qui, faute de concepts intermédiaires, encombre de nombreuses situations. L'analyse non standard créée par Abraham Robinson vers 1961 permet la modélisation de faits expérimentaux faisant intervenir des aspects macro et microscopiques. Elle introduit trois classes de nombres permettant de distinguer les ordres de grandeur: les nombres idéalement petits (notés **ip**), les nombres idéalement grands (**ig**) et les nombres appréciables (**app**). Elle modifie légèrement le principe de récurrence qui devient le *principe de récurrence pragmatique*: si une propriété est vraie pour $n = 1$, et si, supposée vraie pour n, elle est démontrée pour $n + 1$, alors elle est vraie pour tous les entiers non idéalement grands. Elle fait usage du mécanisme des inverses: si x est **ip** non nul, alors $1/x$ est **ig** et réciproquement. Elle abolit les frontières définissables entre les **ip** et les **non-ip** ainsi qu'entre les **ig** et les **non-ig**. Elle fait usage de règles de calcul (voir TP) que les mathématiciens ont appelées «règles de Leibniz». Dans ce modèle, lorsqu'on passe d'un ordre de grandeur à un autre par un certain nombre d'opérations, alors, c'est que le nombre d'opérations est «idéalement grand» Autrement dit, après un nombre d'opérations «idéalement petit» ou «appréciable», on reste dans le même ordre de grandeur.

L'analyse non standard permet la modélisation de situations faisant intervenir différents ordres de grandeur

Pour modéliser de façon satisfaisante les situations d'ordres de grandeur, nous devons renoncer à donner une définition numérique de leurs frontières qui fasse simplement intervenir la relation d'ordre et les opérations arithmétiques usuelles. En revanche, nous devons pouvoir énoncer des propriétés relatives à certains résultats d'opérations du genre: si n est **app** et si ε est **ip**, alors $n + \varepsilon$ est **app**, ou si ε est **ip** et si $n\varepsilon$ est **app**, alors n est **ig**.

Prochaine réunion: lundi 7 septembre 1998 à 17h.

Travaux pratiques

Mots clefs
Analyse non standard, frontière floue, hiérarchie, ordre de grandeur, récurrence pragmatique.

Pour évaluer les ordres de grandeur

Règles de Leibniz (pour les nombres positifs)

ip + **ip** = **ip**	**ip** $*$ **ip** = **ip**
app + **app** = **app**	**app** $*$ **app** = **app**
ig + **ig** = **ig**	**ig** $*$ **ig** = **ig**
ip + **app** = **app**	**ip** $*$ **app** = **ip**
app + **ig** = **ig**	**ig** $*$ **app** = **ig**
ip + **ig** = **ig**	

N.B. Il n’y a pas de règle pour **ip** $*$ **ig**, mais c’est justement ce qui est intéressant ! Ces règles se démontrent en analyse non-standard. Il est remarquable qu’elles correspondent à l’intuition que les mathématiciens du XVII^{e} et XVIII^{e} siècle qui inventèrent le calcul intégral et différentiel ont eu des ordres de grandeur.

Pour colorier les nombres selon leur signe

Exercice 1
a) Représentez les nombres réels à l’aide d’un segment et utilisez un coloriage pour distinguer les positifs des négatifs.
b) Examinez et attribuez une couleur au résultat de l’addition et de la multiplication de nombres de différents signes. Présentez vos résultats sous forme d’une table.

Pour colorier les ordres de grandeur

Exercice 2
a) Représentez les ordres de grandeur des nombres réels en utilisant différentes couleurs.
b) Examinez et attribuez une couleur au résultat de l’addition et de la multiplication de différents ordres de grandeur. Présentez vos résultats sous forme d’une table.
c) Comparez et commentez les tables 1b et 2b.

Pour faire ses premiers pas en analyse non-standard

Exercice 3
Traduisez «un franc de plus ne permet pas à un pauvre de devenir riche» et «soustraire un franc à la fortune d’un riche ne le transforme pas en un pauvre» en utilisant:
a) le langage mathématique standard;
b) le langage mathématique du modèle non standard.

Sources et bibliographie
• A. DELEDICQ et F. CASIRO, *Apprivoiser l’infini*, ACL-Editions 1997.
• R. LUTZ et M. GOZE, article «Analyse non standard» 2-273b, *CD Universalis* v 3.0, 1997.