Math Appl

http://wwwedu.ge.ch/cptic/clubs/mathappl/

Centre pédagogique des technologies de l'information et de la communication (CPTIC)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 154

Lundi 2 octobre 2000 à 17 h

Calcul d'erreur

Bernard Vuilleumier

Le but du calcul d'erreur est d'évaluer l'incertitude sur le résultat à partir des incertitudes sur les grandeurs mesurées

Le résultat d'une expérience est en général lié par une fonction aux grandeurs mesurées

L'accroissement total de la fonction fournit l'incertitude sur le résultat de la mesure

Si les incertitudes sont petites, l'accroissement total de la fonction peut être remplacé par sa différentielle totale

L'évaluation des incertitudes affectant les grandeurs mesurées en sciences expérimentales ainsi que la détermination de l'effet de ces incertitudes sur le résultat recherché constitue le calcul d'erreur. Le résultat d'une expérience est en général lié par une fonction aux grandeurs mesurées. Si l'évaluation numérique des grandeurs mesurées comporte une certaine incertitude, le résultat de l'expérience – qui s'obtient en combinant les grandeurs mesurées – en comportera aussi une. Si les incertitudes de mesure sont petites, nous pouvons remplacer l'incertitude sur le résultat par la *différentielle totale* de la fonction qui relie ce dernier aux grandeurs mesurées. Les incertitudes de mesure pouvant être positives ou négatives, nous considérerons la valeur absolue des incertitudes pour obtenir une majoration de l'incertitude affectant le résultat final.

Tel est le discours habituellement tenu aux élèves, sommés d'accompagner l'énoncé de tout résultat expérimental d'un calcul d'erreur. Êtes-vous comme eux? Ne comprenez-vous rien à ce discours ? Examinons la question d'une autre manière. Si vous voulez calculer la surface S d'une pièce à partir de la mesure de sa longueur a et de sa largeur b, vous utilisez la formule $S = ab$. Voilà la fonction. Les mesures comporteront des incertitudes : Δa pour la longueur et Δb pour la largeur. Comment en déduire l'incertitude ΔS sur la surface calculée? Envisageons le cas le plus défavorable et considérons que les incertitudes augmentent chaque fois les grandeurs mesurées. L'incertitude ΔS sur la surface correspond alors à l'accroissement total de la surface qui apparaît en bleu sur la figure de gauche ci-dessous.

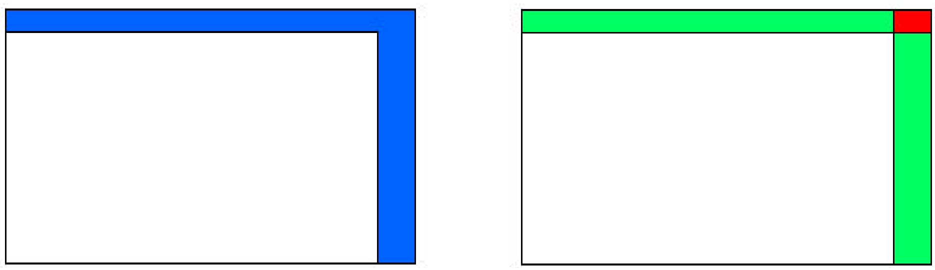

Fig. 1: Accroissement total (à gauche) et différentielle totale (à droite) de la surface d'un rectangle dont les dimensions comportent des incertitudes. La différence entre ces deux grandeurs est le petit rectangle.

Remplacer l'incertitude ΔS sur la surface par la différentielle totale de la fonction revient à négliger l'aire d'un petit rectangle. Cette approximation, qui permet de simplifier le calcul d'erreur, est bonne tant que les incertitudes sur les grandeurs mesurées sont petites en regard de ces grandeurs: l'aire du petit rectangle est alors négligeable par rapport à l'accroissement total.

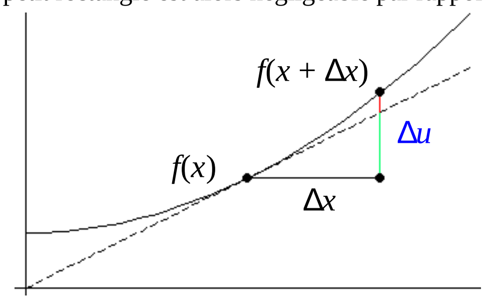

Fig. 2: Plus Δx est petit et plus l'accroissement Δu (distance verticale entre les deux points) de la fonction est voisin de sa différentielle totale (distance verticale entre le point inférieur et la ligne pointillée).

Prochaine réunion: lundi 6 novembre 2000 à 17h.

Travaux pratiques

Mots clefs
Calcul, erreur, incertitude, propagation, fonction, accroissement, différentielle, dérivée.

Pour illustrer l'utilité de la notion de différentielle totale d'une fonction en physique

Exercice 1
a) Exprimez et calculez l'accroissement total des fonctions donnant le périmètre, la surface et le volume d'une salle dont les dimensions sont les suivantes:
• longueur 10.2 ± 0.1 m
• largeur 7.7 ± 0.08 m
• hauteur 3.17 ± 0.04 m.
b) Exprimez et calculez la différentielle totale de chacune de ces fonctions.

Pour justifier les règles usuelles du calcul d'erreur

Exercice 2
Justifiez les règles suivantes: si s est une grandeur obtenue par l'*addition* de deux grandeurs mesurées a et b, l'incertitude absolue sur s est la somme des incertitudes absolues sur a et sur b :

$$s = a + b \qquad \Delta s = \Delta a + \Delta b$$

Si d est une grandeur obtenue par la *soustraction* de deux grandeurs mesurées a et b, l'incertitude absolue sur d est la somme des incertitudes absolues sur a et sur b :

$$d = a - b \qquad \Delta d = \Delta a + \Delta b$$

Si p est une grandeur obtenue par la *multiplication* de deux grandeurs mesurées a et b, l'incertitude relative sur p est la somme des incertitudes relatives sur a et sur b :

$$p = a \cdot b \qquad \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Si q est une grandeur obtenue par la *division* de deux grandeurs mesurées a et b, l'incertitude relative sur q est la somme des incertitudes relatives sur a et sur b :

$$q = \frac{a}{b} \qquad \frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Pour visualiser les notions d'accroissement et de différentielle totale d'une fonction

Exercice 3
Illustrez géométriquement la différence entre l'accroissement et la différentielle totale:
a) de l'aire d'un carré exprimé en fonction de son côté;
b) de l'aire d'un cercle exprimé en fonction de son rayon.