Math Appl

Lundi 3 septembre 2001 à 17 h

Mathématiques et ordinateur

Bernard Vuilleumier

http://wwwedu.ge.ch/cptic/clubs/mathappl/

Centre pédagogique des technologies de l'information et de la communication (CPTIC)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 162

Pour exprimer le résultat d'un calcul, votre ordinateur ne dispose que d'un ensemble fini et discret de nombres appelés «nombres machine»

Les mathématiques utilisent l'ensemble dense et infini des *nombres réels*. Entre deux éléments de cet ensemble, aussi voisins soient-ils, on peut toujours en trouver un troisième. Votre ordinateur effectue quant à lui toutes les opérations mathématiques avec un ensemble discret et fini de nombres. Cet ensemble constitue ce qu'on appelle les *nombres machine*. Il existe donc des trous entre ces nombres et, bien souvent, le résultat d'une opération n'appartient pas à cet ensemble. Si le résultat d'une opération tombe entre deux nombres machine, la meilleure chose que puisse faire votre ordinateur, c'est d'utiliser le nombre machine le plus proche. La différence entre deux nombres machine consécutifs s'appelle une *ulp* (unit in the last place) et correspond à une variation d'une unité du dernier chiffre significatif du nombre machine. La taille d'une ulp varie : elle dépend de l'endroit où l'on se trouve dans l'ensemble des nombres machine.

Le caractère fini et discret de cet ensemble limite la précision car le résultat d'une opération peut tomber entre deux nombres machine

Une calculatrice électronique standard effectue ses calculs en ne retenant qu'un nombre fixe de chiffres significatifs. *Mathematica* peut manipuler des nombres réels approchés comportant n'importe quel nombre de *chiffres significatifs*. Il peut même fournir des résultats exacts. La *précision* d'un nombre réel approché est le nombre de chiffres significatifs qui sont pris en compte par la machine lorsqu'elle effectue une opération avec ce nombre. En général, *Mathematica* distingue deux types de nombres réels approchés: ceux dont la précision est arbitraire, et ceux dont la précision est fixée par la machine. Lorsque vous entrez un nombre réel approché, *Mathematica* le considère comme un nombre dont la précision est égale à celle de la machine tant que vous saisissez un nombre de chiffres significatifs inférieur ou égal à la précision de la machine, et comme un nombre de précision arbitraire si vous en saisissez davantage.

$$0.5 \qquad 0.4\overline{9} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1.0}{2.0}$$

Fig. 1: Pour un mathématicien, tous les nombres ci-dessus désignent le même nombre réel. *Mathematica* en revanche traitera ces nombres d'une manière différente selon la façon dont vous les saisirez.

Mais Mathematica *parvient à surmonter cette difficulté et à calculer avec une précision arbitraire*

Lorsque vous effectuez un calcul avec des nombres de précision arbitraire, *Mathematica*, garde une trace de la précision à chaque étape et vous fournit le résultat avec la plus grande précision possible. La précision du résultat dépend bien sûr de celle des nombres que vous avez entrés et des opérations effectuées. Dans de nombreux calculs, elle peut diminuer progressivement en raison d'erreurs d'arrondi, comme lorsque que vous soustrayez des nombres très voisins. Mais, tous les chiffres du résultat d'un calcul effectué avec des nombres de précision arbitraire sont toujours corrects.

Prochaine réunion: lundi 1^er^ octobre 2001 à 17 h.

Travaux pratiques

Mots clefs
Nombre, réel, machine, ordinateur, chiffre, précision.

Pour comparer les «nombres machine» aux réels approchés utilisés par Mathematica

Exercice 1

a) Quel est le plus petit «nombre machine» de l'ordinateur avec lequel vous travaillez?

b) Quel est le plus grand «nombre machine» de cet ordinateur?

c) Quel est le plus petit nombre réel approché utilisable avec *Mathematica* ?

d) Quel est le plus grand nombre réel approché utilisable avec *Mathematica* ?

Pour illustrer les notions de «précision machine» et de précision arbitraire

Exercice 2

a) Quelle est la précision de cet ordinateur?

b) Quel est le plus petit nombre positif qui, ajouté à 1, donne un résultat différent de 1?

c) Additionnez ce nombre à 1 et vérifiez que la somme est bien différente de 1.

d) Peut-on obtenir un résultat correct en additionnant la moitié de ce nombre à 1?

Pour montrer comment la précision peut se dégrader dans certaines opérations

Exercice 3

a) Quelle est la précision des deux nombres suivants:
- 1.11111111111111111111
- 1.11111111111111111000

b) Quelle est la précision de la différence de ces deux nombres?

c) Quelle est la précision des deux nombres suivants:
- 1.11111111111111111111345
- 1.11111111111111111000

d) Quelle est la précision de la différence de ces deux nombres?

e) Comment peut-on augmenter la précision de ces différences?

Pour prendre en défaut un ordinateur et apprendre à être vigilant

Exercice 4

a) Vérifiez que l'expression algébrique $1 + x$ est équivalente à $(x^2 - 1)/(x - 1)$.

b) Quel est le nombre approché x inférieur à 1 et le plus proche de 1 dont la précision vaut 20?

c) Calculez $1 + x$ avec l'ordinateur. Que vaut la précision du résultat?

d) Calculez $(x^2 - 1)/(x - 1)$ avec l'ordinateur. Que vaut la précision du résultat?

e) Recalculez $1 + x$ et $(x^2 - 1)/(x - 1)$ avec le nombre $x = 0.99999999990000000000$. Quels résultats obtenez-vous et quelle est la précision de ces résultats?

Sources et bibliographie

• Stephen Wolfram, *The Mathematica Book*, Fourth Edition, *Mathematica* Version 4 (Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999).