

Lundi 1^{er} octobre 2001 à 17 h

Transformations

Bernard Vuilleumier

<http://www.edu.ge.ch/cptic/clubs/mathappl/>

Centre pédagogique des technologies de l'information et de la communication (CPTIC)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre n° 163

Jusqu'à la fin du XIX^e siècle, le temps a été considéré comme étant universel

Et pour passer d'un système de référence à un autre, les physiciens n'ont utilisé que la transformation de Galilée

Mais, pour les grandes vitesses, chaque référentiel a son temps propre et il faut utiliser la transformation de Lorentz pour passer d'un à l'autre

Lorsqu'un troubadour entonne une chanson sur un **char** de la Lake Parade, le déroulement des événements ne se présente pas de la même manière à un observateur assis sur le char et à un observateur debout sur le **trottoir**: la distance séparant le troubadour de l'observateur reste constante pour l'observateur assis sur le char alors qu'elle varie pour celui qui est debout sur le trottoir. C'est banal. Ce qui l'est moins en revanche, c'est que la durée de la chanson n'est pas la même pour les deux observateurs: elle dépend du choix du système de référence! Transposons la scène pour obtenir une situation dans laquelle une différence d'écoulement du temps selon le choix du système de référence peut être mise en évidence expérimentalement. A des hauteurs comprises entre 10 et 60 km au-dessus du sol, les rayons cosmiques bombardent en permanence les noyaux des atomes de l'atmosphère et produisent des particules instables (début de la chanson), appelées mésons, qui finissent par exploser (fin de la chanson). Suivons ces mésons sur leur trajet vers le sol. Dans le système de référence lié aux particules (observateur assis sur le char), la moitié d'entre eux explosent après un temps très bref. Même en supposant que la vitesse de ces particules est égale à celle de la lumière, il leur faudrait un temps bien supérieur à leur durée de vie pour atteindre le sol. Or des mésons créés à haute altitude sont détectés chaque jour à la surface de la terre! La production puis la disparition d'un méson correspond à deux événements (début et fin de la chanson). Comment se présentent ces événements pour un observateur lié à la terre? Quel est le temps écoulé entre l'apparition et la disparition d'un méson selon l'horloge du laboratoire? Quel est le trajet parcouru? Autrement dit, étant donné un événement E de coordonnées x' et t' connues dans le **système du mobile**, comment peut-on prédire les coordonnées x et t du même événement dans le **système du laboratoire**?

Transformation de Galilée

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

Transformation de Lorentz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}\right)x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

La physique a deux réponses à cette question. Jusqu'à la fin du XIX^e siècle personne n'a pensé que le temps pourrait s'écouler de manière différente dans les deux systèmes de référence et les physiciens ont posé $t' = t$ et utilisé la transformation de Galilée pour passer d'un système de référence inertiel à un autre. Au début du XX^e siècle, grâce aux travaux de Lorentz et de Poincaré, Einstein a pu montrer dans sa théorie de la relativité restreinte que chaque référentiel avait son temps propre et que, dans certains cas, la notion de temps universel devait être abandonnée. Ainsi, deux horloges parfaitement accordées lorsqu'elles subsistent côte-à-côte, cessent de l'être lorsqu'elles sont en mouvement relatif. De même, deux objets identiques lorsqu'ils sont collés l'un contre l'autre, ont des longueurs différentes lorsqu'ils sont en mouvement relatif. Si la vitesse relative des deux systèmes de référence n'est plus négligeable devant la vitesse de la lumière, $t' \neq t$ et il faut remplacer la transformation de Galilée par celle de Lorentz.

Prochaine réunion: lundi 5 novembre 2001 à 17h.

Travaux pratiques

Mots clefs

Contraction, dilatation, distance, Einstein, Galilée, intervalle, invariant, longueur, Lorentz, relativité, système de référence, temps, transformation.

Pour introduire les changements de référentiel et la notion d'invariant

Exercice 1

- Deux systèmes de référence ont une origine commune et les axes x et x_1 forment un angle θ . Exprimez les coordonnées $\{x_1, y_1\}$ d'un point quelconque en fonction des coordonnées $\{x, y\}$ et de l'angle θ .
- Un point P a pour coordonnées $\{7, 6\}$ dans un système de référence Oxy et $\{2, 9\}$ dans un système Ox_1y_1 . Calculez l'angle formé par les axes x_1 des deux systèmes.
- Un point Q a pour coordonnées $\{10, 10\}$ dans le système de référence Oxy . Que valent ses coordonnées dans le système Ox_1y_1 .
- Démontrez que la distance PQ conserve la même grandeur dans les deux systèmes de référence.

Pour illustrer la notion d'intervalle de la relativité

Exercice 2

- En géométrie, la grandeur $(x^2 + y^2)$ est invariante: elle conserve la même valeur lors du passage d'un système de référence à un autre. En relativité restreinte, c'est la grandeur $(x^2 - t^2)$ qui est invariante. La racine carrée de $(x^2 - t^2)$ s'appelle *intervalle*. Comment la racine carrée de $(x^2 + y^2)$ s'appelle-t-elle en géométrie?
- Un méson prend naissance dans les hautes couches de l'atmosphère, puis se désintègre. Dans un système de référence lié au laboratoire, la désintégration de la particule est séparée de sa naissance par les coordonnées x, t . Exprimez l'intervalle dans le système lié à la particule et dans celui lié au laboratoire.
- Deux événements se produisent au même endroit dans un laboratoire, mais sont séparés par une durée de 3 secondes. Quelle est la distance qui les sépare dans un système lié à un mobile si la durée entre ces deux événements, mesurée dans ce système, vaut 5 secondes. Que vaut la vitesse relative $\beta = v/c$ de ce mobile?

Pour établir la transformation de Lorentz

Exercice 3

Le passage d'un système de référence à un autre peut s'exprimer ainsi:

$$\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ t' \end{pmatrix}$$

- Sachant que le **système lié au mobile** se déplace à la vitesse v selon l'axe Ox du **système lié au laboratoire** et que l'intervalle entre deux événements quelconques garde la même valeur dans les deux systèmes de référence, déterminez les coefficients c_{11} , c_{12} , c_{21} et c_{22} qui définissent une transformation de Lorentz.
- Comparez les coefficients obtenus à ceux caractérisant la transformation définie au point a) de l'exercice 1.
- Exprimez les coefficients de la transformation de Lorentz à l'aide de fonctions trigonométriques hyperboliques.

Les lettres et les corrigés sont disponibles à l'adresse <http://Hypatie.ge.ch>

Sources et bibliographie

- Monard, J. - A., *Mécanique*, Bienne, (1977).
- Taylor, E. - F. et Wheeler, J. - A. *A la découverte de l'espace temps et de la physique relativiste*, Dunod, Paris (1970).