Math Appl

Lundi 2 septembre 2002 à 17 h

Gardez le contact !

Bernard Vuilleumier

http://Hypatie.ge.ch

Centre pédagogique des technologies de l’information et de la communication (CPTIC)
Rue Théodore-de-Bèze 2
Case Postale 3144
1211 GENÈVE 3
Tél: (022) 318.05.30
Fax: (022) 318.05.35
Directeur: Raymond Morel

Lettre nº 171

Vous pouvez apprendre des concepts mathématiques en regardant ce qui se passe à l’écran de votre ordinateur et en provoquant ce que vous allez observer. Inutile de vous forcer à mémoriser d'absconses formules pour comprendre. C’est la voie des mathématiques actives: votre premier contact avec une idée est visuel et se fait via l’écran d’un ordinateur avec lequel vous interagissez. Utilisons cette voie pour explorer la notion de proximité.

Lorsque deux courbes se touchent en un point, elles peuvent être plus ou moins proches au voisinage de ce point. Dans certains cas, un examen visuel permet de déterminer la « qualité» de cette proximité comme nous pouvons le constater dans la figure 1 ci-dessous.

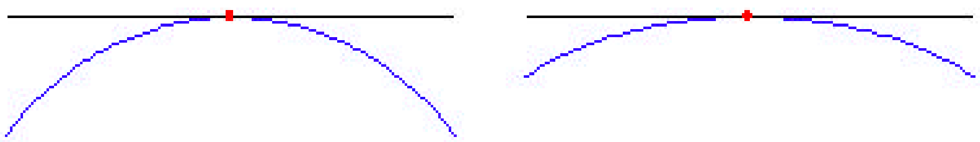

Fig. 1: A gauche, les deux courbes se touchent en un point et sont proches l’une de l’autre près de ce point. A droite, la proximité entre les deux courbes près du point de contact est meilleure que dans le premier cas.

Le premier contact avec une idée peut être visuel…

Mais, le plus souvent, une approche visuelle ne permet pas de trancher. Comment savoir si les deux courbes de droite de la figure 2 sont plus proches les unes des autres au voisinage du point de contact que celles de gauche? En d’autres termes, comment mesurer la proximité?

Mais la vision ne parvient en général pas à distinguer le degré de proximité de deux courbes…

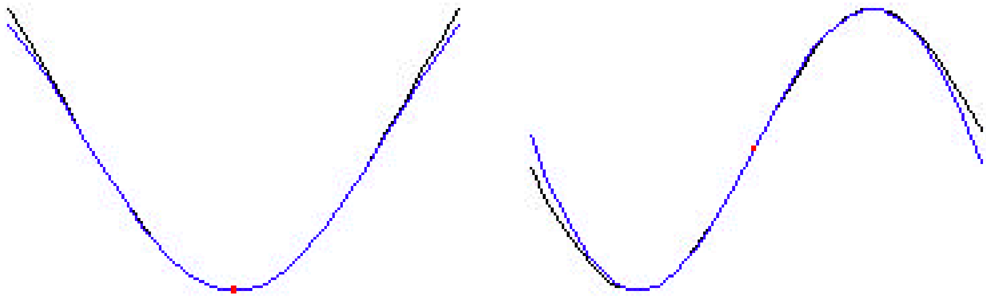

Fig. 2 : A gauche comme à droite, les deux courbes sont très voisines les unes des autres près du point de contact. Le passage d’une courbe à l’autre près de ce point peut se faire aisément.

Il faut alors recourir à une approche quantitative utilisant la notion d’ordre de contact…

Pour quantifier la proximité de deux courbes au voisinage d’un point de contact il faut recourir à la notion de « dérivée». Cette notion nous renseigne sur la façon dont varie l’allure d’une courbe. Si deux courbes ont un point de contact, les fonctions qui définissent ces courbes admettent la même valeur en ce point. Si de plus les m premières dérivées de ces fonctions en ce point admettent les mêmes valeurs, nous dirons que les fonctions ont un ordre de contact m en ce point. Plus l’ordre de contact est élevé, plus la transition d’une courbe à l’autre est aisée. Quelles sont les applications possibles des notions de proximité et d’ordre de contact ? Chaque fois qu’il s’agit de raccorder des tracés permettant des mouvements sans à-coup, l’ordre de contact au point de raccordement doit être envisagé:

Qui trouve de nombreuses applications quand il s’agit d’éviter les à-coups

- tracé des routes et des lignes de chemin de fer;
- trajectoire des avions en phase d’atterrissage;
- conception des pistolets de graphiste et des «splines».

Prochaine réunion: lundi 7octobre 2002 à 17h.

Travaux pratiques

Mots clefs
Contact, dérivée, ordre, proximité, spline

Pour trouver les coordonnées de points de contact et l'ordre de contact en ces points

Exercice 1
Soient les couples de fonctions suivantes:

1) $f(x) = cos(2x)$
$g(x) = (1-4x^2)^{1/2}$
définies pour $-0.5 \leq x \leq 0.5$

2) $f(x) = sin(x)^2$
$g(x) = x^2 cos(x)^{2/3}$
définies pour $-1 \leq x \leq 1$

3) $f(x) = 1 + sin(x)$
$g(x) = (60 + 60x + 3x^2 - 7x^3)/(60 + 3x^2)$
définies pour $-3 \leq x \leq 3$

a) Vérifiez que chaque couple de fonctions a bien un point de contact et donnez les coordonnées de ce point.
b) Calculez l'ordre de contact de chaque couple en ce point.

Pour utiliser la notion d'ordre de contact et introduire les «splines»

Exercice 2
a) Trouvez le polynôme $g(x)$ de degré 2 ayant l'ordre de contact le plus élevé possible avec la fonction $f(x) = e^x$ en $x = 0$.
b) Dessinez la « spline » composée de votre polynôme à gauche de (0;1) et de e^x à droite de ce raccord.

Pour illustrer l'importance pratique de l'ordre de contact et utiliser les «splines»

Problème
Lors d'un atterrissage aux instruments, l'avion approche d'abord la piste en vol horizontal. Lorsque l'avion passe – à une altitude h – au-dessus d'un certain point d'abscisse d par rapport au point de contact (touch-down) sur la piste, le système électronique prend le contrôle de l'appareil et le guide sur une trajectoire qui peut être décrite par un polynôme.
Dessinez la trajectoire complète de l'avion à l'aide d'une «spline» comportant:
• le vol horizontal avant la prise en charge par les instruments;
• la phase de descente (trajectoire polynômiale);
• le trajet – supposé horizontal – sur la piste.

Indications
Les raccords de la « spline » se trouvent en (0; 0) et en (d; h). Pour assurer la sécurité de l'opération, il faut au minimum un ordre de contact de 2 aux raccords.

Pour en savoir plus
• B. Davis, H. Porta, J. Uhl. *Calculus & Mathematica*. *Approximations: Measuring Nearness*, Addison-Wesley, (1994), 261 pp.