Lundi 6 décembre 2004 à 17 h

Coordonnées curvilignes

Bernard Vuilleumier

Localiser un point dans le plan à l'aide de ses coordonnées cartésiennes (a, b) revient à trouver l'intersection des deux droites $x = a$ et $y = b$. Considérons deux points P_1 et P_2, le premier situé à l'intersection des droites $x_1 = 2$ et $y_1 = 1$, et le second à l'intersection des droites $x_2 = 3$ et $y_2 = 2$. Si les abscisses x_1 et x_2 sont différentes et si les ordonnées y_1 et y_2 le sont aussi, les points délimitent un rectangle caractérisé par ($x_{\min}$, $y_{\min}$) et ($x_{\max}$, $y_{\max}$).

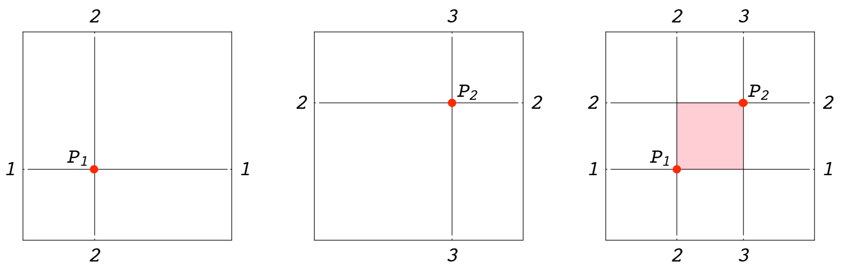


Fig. 1 : Deux points du plan, s'ils ont des abscisses différentes et des ordonnées diffférentes, délimitent un rectangle.

Si un point de coordonnées (a, b) est repéré à l'aide de coordonnées curvilignes $u(x, y)$ et $v(x, y)$, ce point se situe aux intersections des courbes $u(a, b)$ et $v(a, b)$. Le point P_1, de coordonnées (2, 1), se trouve à l'intersection des courbes $u(2, 1)$ et $v(2, 1)$ et le point P_2, de coordonnées (3, 2), à l'intersection des courbes $u(3, 2)$ et $v(3, 2)$.

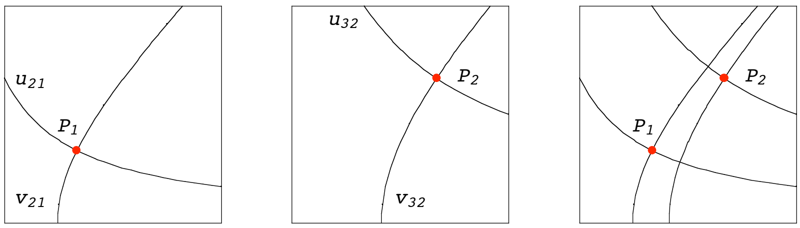


Fig. 2 : Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes déforme le plan : la surface délimitée par les courbes passsant par les deux points n'est plus la même.

La passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes transforme les droites en courbes. Chaque domaine du plan subit une déformation et sa surface après transformation n'est pas égale à sa surface d'origine. Quel avantage les coordonnées curvilignes présentent-elles ? Leur intérêt principal réside dans la possibilité de transformer des régions du plan dont le contour est compliqué en domaines aux frontières plus simples. Si le facteur de conversion qui exprime le rapport des surfaces $\frac{\Delta s}{\Delta s'}$ est connu en chaque point du domaine, le calcul de l'aire Δs du quadrilatère curviligne de la figure 3 se simplifie et se ramène au calcul de l'aire $\Delta s'$ d'un rectangle.

Fig. 3 : L'aire $\Delta s'$ d'un rectangle est plus facile à calculer que celle Δs d'une région du plan délimitée par des courbes.
Les coordonnées curvilignes permettent de transformer des courbes en droites et facilitent, de ce fait, le calcul des aires.

Prochaine réunion : lundi 3 janvier 2005 à 17 h

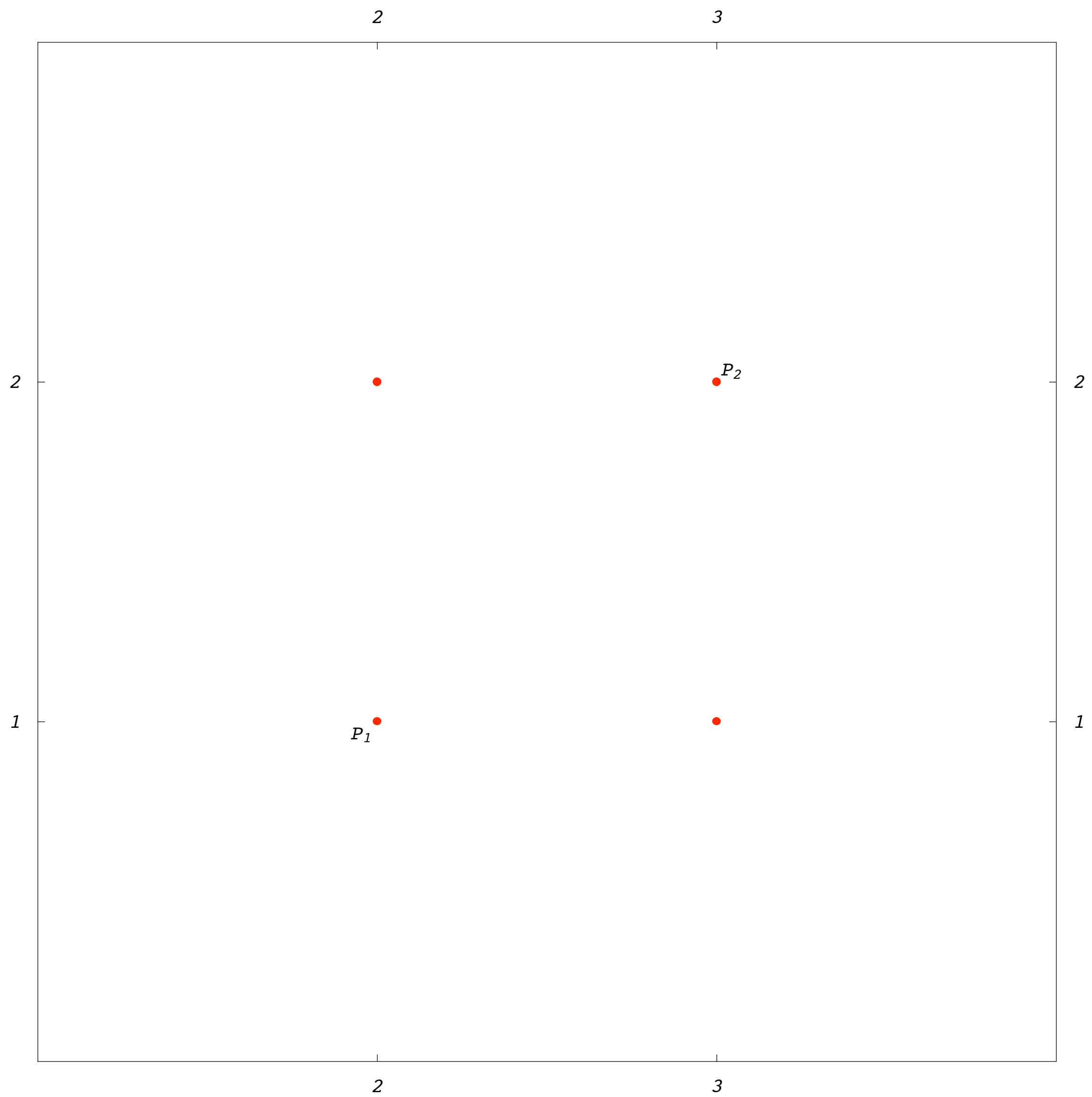
Travaux pratiques

■ Exercice 1

Dessinez les rectangles définis par les couples de points suivants :
a) (2, 1) et (3, 2)
b) (2, 2) et (3, 1)

■ Exercice 2

On donne le système de coordonnées curvilignes $u(x, y) = xy$ et $v(x, y) = x^2 - y^2$.
a) Calculez les coordonnées curvilignes u et v des points P_1 et P_2 de coordonnées cartésiennes (2, 1) et (3, 2).
b) Dessinez les courbes u et v passant par les points (2, 1), (3, 1), (2, 2) et (3, 2) ci-dessous.
c) Dessinez le quadrilatère curviligne défini par les courbes $u(x, y)$ et $v(x, y)$ passant par (2, 1) et (3, 2).



■ Pour en savoir plus

• Bill DAVIS, Horacio PORTA, Jerry UHL. *Calculus&Mathematica, VECTOR CALCULUS : Measuring in Two and Three Dimensions*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.