SEM PROSPECTIVE

Lundi 4 avril 2005 à 17 h

Le lièvre et la tortue

Bernard Vuilleumier

A l'époque où La Fontaine (1621-1695) dit « rien ne sert de courir », Huygens (1629-1695), le spécialiste de la mesure du temps au XVII^{e} siècle, parvient à montrer que, sous l'influence de la gravitation et pour une trajectoire plane convenablement choisie, un mobile met le même temps pour atteindre le point le plus bas, quel que soit son point de départ !

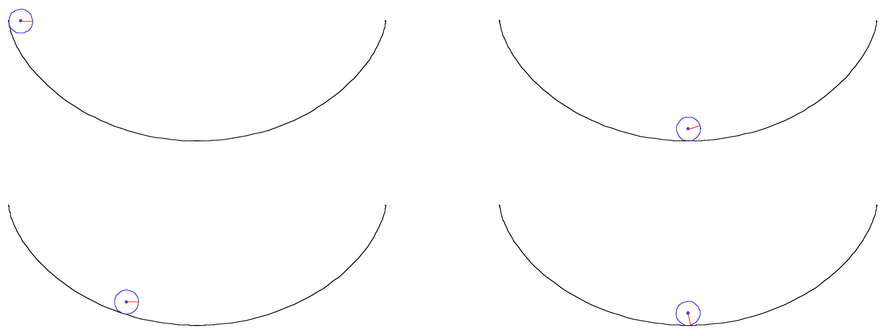

Fig. 1 : On lâche une bille du bord, puis d'une position voisine du fond d'une cuvette (1^{e} colonne). Quel temps met-elle dans chaque cas pour atteindre le fond de la cuvette ? (2^{e} colonne). Étonnant, mais le temps de parcours pour atteindre le fond ne dépend pas de la position initiale de la bille !

Si les mobiles partent en même temps, ils atteignent le fond de la cuvette au même instant, quelles que soient leurs positions initiales. La Fontaine a raison sur un point au moins : il faut partir à temps. Mais il sert quand même de courir ! La courbe qui décrit cette trajectoire « tautochrone » est une cycloïde. Elle présente en plus la particularité de minimiser le temps de parcours entre le point de départ et le point le plus bas. Sur toute autre courbe passant par ces deux points, il faut davantage de temps à la bille pour effectuer la descente.

Fig. 2 : Le chemin le plus court n'est pas toujours le plus bref ! Lorsque les deux billes partent en même temps du point le plus haut, c'est celle qui suit la cycloïde qui arrive la première en bas.

Prochaine réunion : lundi 2 mai 2005 à 17 h

■ Travaux pratiques

■ Cycloïde

Soit une courbe c – que nous supposerons sans boucle, continue et dérivable – donnée sous forme paramétrique : $c(u) = \{e(u), f(u)\} = \{x, y\}$. Cette courbe passe par les deux points $c(u_0) = \{e(u_0), f(u_0)\}$ et $c(u_1) = \{e(u_1), f(u_1)\}$ que nous noterons plus brièvement (x_0, y_0) et (x_1, y_1). Dessinez la courbe $c(u) = \{e(u), f(u)\} = \{u - sin(u), cos(u) - 1\}$ pour $0 \leq u \leq \pi$ et les deux points extrêmes $c(0) = (0, 0)$et $c(\pi) = (\pi, -2)$.

■ Conservation de l'énergie mécanique

Considérons un mobile ponctuel de masse m glissant sans frottement sur cette courbe sous l'effet de la gravitation g. Établissez l'expression donnant la vitesse du mobile lorsqu'il se trouve en un point (x_1, y_1) de la courbe si sa vitesse en (x_0, y_0) est nulle et si $y_1 < y_0$.

■ Piste et trajectoire du centre de masse

Considérons une bille de rayon r roulant sans glisser sur cette courbe sous l'effet de la gravitation g. Donnez l'expression de la trajectoire du centre de masse de la bille et dessinez la «piste» ainsi que la trajectoire du centre de masse.

■ Tautochrone

Simulez le mouvement sur cette piste sous l'effet de la gravitation g :
• d'une bille ponctuelle glissant sans frottement;
• d'une bille de rayon r roulant sans glisser;
• d'une bille de rayon r subissant différents types de frottements.
Comparez dans chaque cas les temps de descente pour différents points de départ.

■ Brachistochrone

Comparez les temps de descente sur différentes courbes passant par les deux points $(0, 0)$ et $(\pi, -2)$.

■ Pour en savoir plus

• Ivanov Alexey G. http://home.ural.ru/~iagsoft/BrachJ2.html
• Stan Wagon. *Mathematica in Action*. W. H. Freeman and Company, New-York 1991.
• Eric W. Weisstein. «Tautochrone Problem.» From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/TautochroneProblem.html
• Eric W. Weisstein. «Brachistochrone Problem.» From *MathWorld*--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html

Le lièvre et la tortue : corrigé

■ Cycloïde

Définissons la fonction $c(u) = \{e(u), f(u)\} = \{u - \sin(u), \cos(u) - 1\}$ et dessinons-la pour $0 \leq u \leq \pi$ avec les deux points extrêmes $c(0) = (0, 0)$ et $c(\pi) = (\pi, -2)$:

```
c[u_] := {u - Sin[u], Cos[u] - 1}
Show[ParametricPlot[c[u], {u, 0, π},
   PlotStyle -> Hue[1], DisplayFunction → Identity],
  Graphics[{PointSize[0.025], Map[Point, {c[0], c[π]}]}],
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

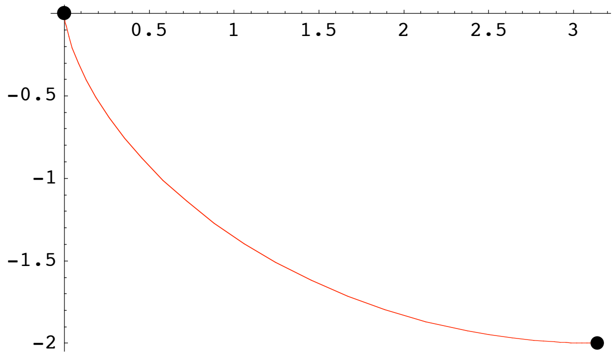

Fig. 1 : Le mobile ponctuel glisse sans frottement sur la piste.

■ Conservation de l'énergie mécanique

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$E_{méc}(x_0, y_0) = E_{méc}(x_1, y_1)$$

Comme la vitesse du mobile est nulle en (x_0, y_0) , l'énergie mécanique en ce point est égale à l'énergie potentielle de gravitation du mobile de masse m donnée par mgy_0. L'énergie mécanique en (x_1, y_1) comporte de l'énergie cinétique si $y_1 < y_0$:

$$mgy_0 = mgy_1 + \frac{m v_1^2}{2}$$

En résolvant cette équation par rapport à v_1, on obtient la vitesse recherchée :

$$v_1 = \sqrt{2 g (y_0 - y)}$$

■ Piste et trajectoire du centre de masse

La trajectoire du centre de masse d'une bille s'obtient en ajoutant un vecteur normal à la piste, vecteur dont la grandeur est égale au rayon r de la bille. Ce vecteur peut pointer en «dessus» ou en «dessous» de la piste. Définissons la piste, le vecteur unité normal à la piste, la trajectoire du centre de masse de la bille et dessinons la trajectoire et la piste :

```
dn = {r → 0.1, dd -> 1};  (* dn données numériques, r : rayon de la bille *)
(* si dd=1, vecteur unité normal «dessus» et «dessous» si dd=-1 *)
xp := e[u]
yp := f[u]
piste := {xp, yp}
vn := dd / Sqrt[f'[u]^2 + e'[u]^2] {-f'[u], e'[u]};     (* vecteur unité normal *)
traj := piste + r * vn;
Show[ParametricPlot[{piste /. dn, traj /. dn}, {u, 0, π},
   PlotStyle → {Hue[0], GrayLevel[0]}, DisplayFunction → Identity],
  Graphics[{PointSize[0.025], Map[Point, {{r, 0}, {π, -2 + r}}]}] /. dn,
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```

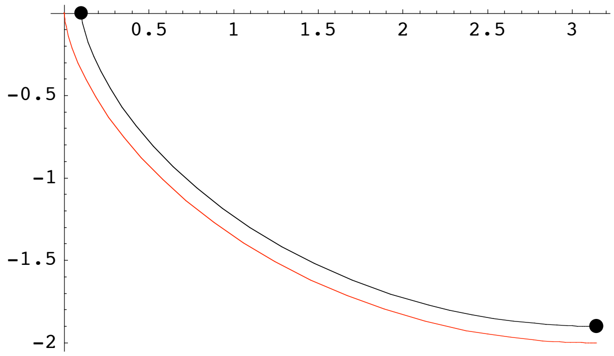

Fig. 2 : Trajectoire du centre de masse de la bille au dessus de la piste.

■ Tautochrone et brachistrochrone

Le notebook «Tautochrone.nb», disponible sur Hypatie, permet de simuler le mouvement d'un mobile (bille, cylindre, anneau) dans les différentes conditions proposées.