

# Les mathématiques de la musique

La gamme musicale en usage dans la musique occidentale trouve son origine chez les Grecs anciens. Au départ il y avait sept notes primaires dans la gamme. On appelle cela une gamme *diatonique* et elle est familière même pour les non-musiciens: do ré mi fa sol la si do. On peut jouer cette gamme avec les touches blanches du clavier d'un piano: Il y a huit échelons de *do* au *do* suivant, donc cet intervalle est appelé *octave*.

Avec le temps, cinq autres notes furent ajoutées à la gamme occidentale : Cette gamme de 12 notes est appelée la gamme *chromatique*. Pour une gamme commençant par do, on joue les 5 notes supplémentaires avec les touches noires d'un clavier de piano.

Les gammes musicales sont liées de près aux mathématiques. Vous utiliserez un microphone relié à un ordinateur pour enregistrer la fonction d'onde d'un son. L'ordinateur fera aussi une analyse mathématique de l'onde appelée transformée de Fourier rapide (FFT) pour déterminer la fréquence fondamentale du son. Votre mission est de mesurer les fréquences des notes de la gamme chromatique et de trouver la relation mathématique entre elles.

Si deux notes jouées en même temps forment un accord agréable pour nos oreilles, c'est d'habitude qu'elles sont mathématiquement liées. Dans cette expérience, vous chercherez quelles mathématiques se cachent derrière les intervalles musicaux communément utilisés en musique.

Pour ce labo, un clavier électronique est recommandé, mais vous pouvez utiliser d'autres instruments s'ils sont disponibles.

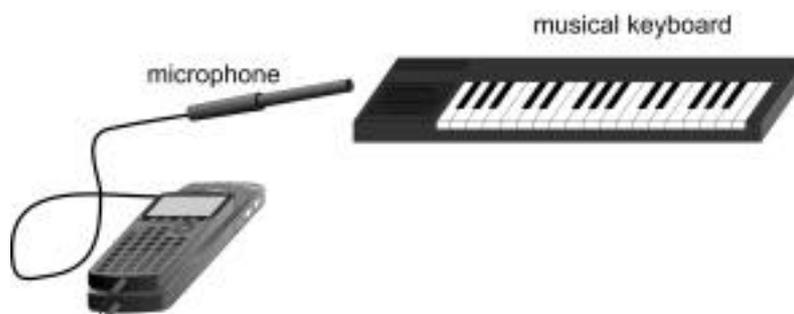


Figure 1

## OBJECTIFS

- Déterminer les fréquences des notes de la gamme.
- Examiner les différences et le rapport entre ces notes.
- Déterminer les relations mathématiques utilisées pour établir les gammes.

## MATERIEL

Power Macintosh  
LabPro  
Logger Pro

Microphone Vernier  
Clavier électronique ou autre instrument

## QUESTIONS PREALABLES

1. Quel est terme de physique le plus proche de ce qu'on désigne comme la hauteur d'une note (à savoir, est-elle grave ou aiguë) ?
2. Quel est terme de physique le plus proche de ce qu'on désigne comme la force d'un son?
3. Faites une hypothèse sur le lien entre les fréquences des notes de la gamme diatonique (do-ré-mi...) Pensez-vous que chaque note est à un certain nombre de Hz de plus que la note précédente? Ce nombre est-il constant? Et pour la gamme chromatique?

## PROCEDURE

1. Connectez le microphone Vernier au Channel 1 du LabPro.
2. Ouvrez le fichier dans le dossier Experiment 23 de *Physics with Computers*. L'ordinateur montrera une fenêtre graphique pour la fonction d'onde du son, une fenêtre pour les tableaux de données et une fenêtre pour la FFT. La FFT, ou transformée de Fourier rapide, est une analyse mathématique d'une relation périodique décomposée en sinusoïdales de diverses fréquences. Nous utiliserons cette fenêtre pour déterminer la fréquence fondamentale de chaque note testée.
3. Produisez la première note à étudier, *Do*. Si vous utilisez un clavier, référez-vous à la Figure 2. C'est le *do* du milieu sur un clavier standard de piano et sa fréquence devrait être approximativement de 262 Hz. Tenez le micro proche de la source du son et cliquez sur . Gardez un son stable pendant une ou deux secondes (jusqu'à ce que l'onde apparaisse à l'écran). Si vous ne voyez pas une fonction d'onde simple et bien définie, essayez d'ajuster différemment la position du micro et essayez à nouveau.
4. Regardez le spectre de fréquence de l'onde dans la fenêtre FFT. C'est un graphique montrant l'amplitude relative des fréquences présente dans le son. Comme dans cette expérience nous utilisons des sons assez simples, vous ne verrez probablement qu'un ou deux pics sur ce graphique. La fréquence présente la plus basse est appelée la *fondamentale*. La fréquence fondamentale en haut à gauche de la fenêtre FFT. Notez cette valeur dans le tableau des données.
5. Répétez les étapes 3 et 4 pour chacune des notes listées dans le tableau des données. Les notes 1 – 12 sont les notes d'une octave. Les notes 13, 17, 20 et 25 sont dans des octaves plus élevées. Utilisez le diagramme comme référence pour trouver ces notes sur un clavier. Les notes musicales sont aussi listées dans le tableau, avec un indice correspondant à leur octave, tel que  $Do_4$ .

## TABLEAU DES DONNEES

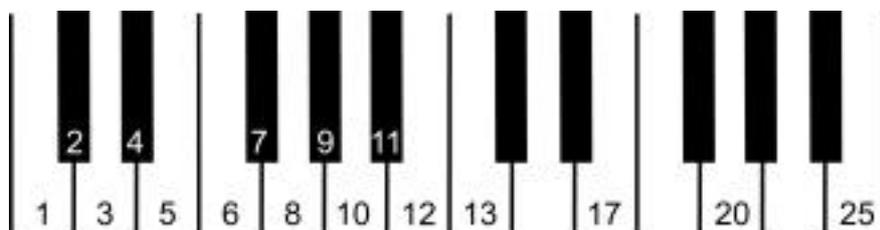


Figure 2

	Note	Fréquence (Hz)	f (Hz)	Rapport à la note d'avant	Rapport à C <sub>4</sub>
1	<b>Do<sub>4</sub></b>				1.0
2	Do <sub>4</sub> <sup>#</sup>				
3	<b>Ré<sub>4</sub></b>				
4	Mi <sub>4</sub> <sup>b</sup>				
5	<b>Mi<sub>4</sub></b>				
6	<b>Fa<sub>4</sub></b>				
7	Fa <sub>4</sub> <sup>#</sup>				
8	<b>Sol<sub>4</sub></b>				
9	La <sub>4</sub> <sup>b</sup>				
10	<b>La<sub>4</sub></b>				
11	Si <sub>4</sub> <sup>b</sup>				
12	<b>Si<sub>4</sub></b>				
13	<b>Do<sub>5</sub></b>				
17	<b>Mi<sub>5</sub></b>				
20	<b>Sol<sub>5</sub></b>				
25	<b>Do<sub>6</sub></b>				

## ANALYSE

1. Calculez la différence de fréquence entre chaque note (sauf la première et les trois dernières) et la précédente. Notez votre résultat dans la colonne f (Hz) du tableau. Cette différence est-elle constante sur l'octave que vous étudiez?
2. Calculez le rapport entre la fréquence de chaque note (sauf la première et les trois dernières) et celle de la précédente. Notez votre résultat dans le tableau. Ce rapport est-il constant sur l'octave que vous étudiez ?
3. Remplissez les cellules non grisées de la dernière colonne en calculant le rapport de la fréquence de la note à C<sub>4</sub> .
4. Regardez vos données sur les touches blanches (la gamme diatonique) Ces notes sont en gras dans le tableau. Essayez de trouver une relation entre ces fréquences et ces rapports. Les rapports de la dernière colonne peuvent-ils être convertis en rapports de petits nombres entiers? Quels seraient ces rapports'? [Exemple: rapport = 1.33 = 4:3]
5. Considérant toutes les notes, quel lien existe-t-il entre deux notes successives? Expliquez en citant des preuves spécifiques tirées de vos données.
6. À partir de vos données, quelles devraient être les fréquences de ces notes: Do<sub>3</sub>, Do<sub>7</sub>, et Ré<sub>5</sub>?
7. L'intervalle entre les notes Mi<sub>4</sub> et Do<sub>4</sub> représente une tierce et l'accord entre les deux est agréable à l'oreille; c'est vrai aussi pour Sol<sub>4</sub> et Do<sub>4</sub>, une quinte et Do<sub>5</sub> et Do<sub>4</sub>, une octave. Donnez les rapports d'entiers pour ces intervalles .

## **EXTENSIONS**

1. Faites les mêmes mesures avec un point de départ autre que le Do<sub>4</sub>. (les musiciens diraient que c'est "faire le même labo dans un autre ton".)
2. Si vous numérotez les touches d'un clavier comme sur la figure, vous pouvez construire un graphique de la fréquence en fonction du numéro. Ajustez ces données par une courbe. Quelle équation décrit-elle? Comment interprétez-vous cette équation?
3. Faites une investigation des différents accordages pour les instruments de musique: naturel, bien tempéré, Pythagoricien, diatonique. Étudiez les fréquences d'un instrument de musique qui utilise une gamme complètement différente de celles décrites ici, comme un instrument de l'Asie du Sud-Est .