# L'ENIGME DE LA PATINEUSE

*Pascal Rebetez*
*Juillet 2024*

# TABLE DES MATIERES

# 1 Introduction

Les patineuses artistiques ont l'art de nous émerveiller ; elles virevoltent sur la glace comme les hirondelles dans le ciel printanier[1]. L'une des prouesses que réalisent ces virtuoses sur lames est la pirouette. C'est une figure durant laquelle la patineuse tourne sur elle-même dans une position qui peut varier au cours du temps.
Citons par exemple la pirouette Biellmann, au cours de laquelle la patineuse saisit son pied libre des deux mains au-dessus de la tête alors que l'ensemble du corps est en rotation sur l'autre pied. On peut admirer ci-dessous la performance de Caroline Zhang (Etats-Unis) dans l'exécution de cette pirouette spectaculaire.

Pendant une pirouette, la patineuse peut modifier sa vitesse de rotation en rapprochant plus ou moins les différentes parties de son corps (bras et jambes essentiellement) de l'axe autour duquel elle effectue sa rotation. Cet axe est une droite verticale passant par le point de contact entre le patin et la glace (fig. ci-dessous).

[1] Ceci reste valable pour les patineurs artistiques.


La vitesse de rotation de la patineuse est d'autant plus élevée que les parties de son corps sont proches de l'axe de rotation. En réglant de cette manière sa vitesse de rotation, l'athlète exploite, peut-être sans le savoir, l'une des lois les plus fondamentales de la physique : la *loi de conservation du moment cinétique*. Avant de l'énoncer, il convient de définir certaines grandeurs physiques, en termes desquelles s'expriment les lois de la mécanique. Il s'agit :

- de la quantité de mouvement, une grandeur vectorielle notée $\vec{p}$
- du moment de force, une grandeur vectorielle notée $\vec{\tau}$
- du moment cinétique, une grandeur vectorielle notée $\vec{l}$

# 2 Les grandeurs de la mécanique des systèmes de particules

## La quantité de mouvement

- Définition

la **quantité de mouvement** $\vec{p}$ (momentum en anglais) d'une particule est le produit de sa masse $m$ par sa vitesse $\vec{v}$ :

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1}$$

- Caractéristiques de la quantité de mouvement

Direction et sens : Les mêmes que pour le vecteur vitesse.
Dimension et unité :$[p] = M\,L/T$ , en kg·m/s

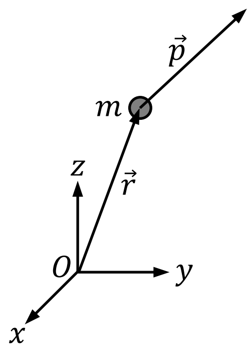
La quantité de mouvement $\vec{P}$ *d'un système de particules* est la somme des quantités de mouvement de toutes les particules du système :

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \tag{2}$$

## Le moment cinétique

- Définition du moment cinétique

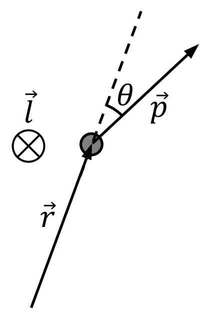
Considérons une particule de masse $m$, de quantité de mouvement $\vec{p}$ et située à une position $\vec{r}$ relativement à un repère $(O, x, y, z)$. Le **moment cinétique** de cette particule, noté $\vec{l}$, est défini par le produit vectoriel de son vecteur position et de son vecteur quantité de mouvement :




$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{3}$$

- Caractéristiques du moment cinétique

Par définition du produit vectoriel (cf. Annexe 3), le moment cinétique est un vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes :
Direction
La direction de $\vec{l}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{r}$ ainsi qu'au vecteur $\vec{p}$ ; autrement dit, $\vec{l}$ est normal au plan engendré par $\vec{r}$ et $\vec{p}$.
Sens
Le sens de $\vec{l}$ est donné par la règle de la main droite ou par la règle du tire-bouchon.

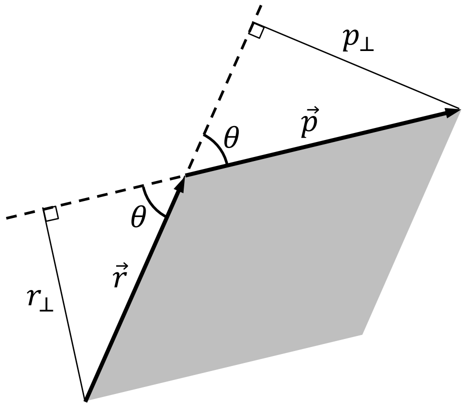


Norme

Par définition du produit vectoriel, la norme de $\vec{l}$ est donnée par $l = rp \sin\theta$ où $\theta$ est l'angle (le plus petit) entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{p}$. Cette norme peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$l = \underbrace{(r \sin\theta)}_{r_\perp} p = r \underbrace{(p \sin\theta)}_{p_\perp} = r_\perp p = r p_\perp \tag{4}$$

où $r_\perp$ est la composante du vecteur $\vec{r}$ dans la direction perpendiculaire au vecteur $\vec{p}$ et $p_\perp$ est la composante du vecteur $\vec{p}$ dans la direction perpendiculaire au vecteur $\vec{r}$, comme l'indique la figure ci-dessous :




Nous voyons aussi sur la figure ci-dessus que cette norme est égale à l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{p}$.

*Dimension et unité*

La norme du moment cinétique a pour dimension $[l] = ML^2/T$ qui dans le SI a pour unité le kg·m$^2$/s.

*Remarque* : le moment cinétique $\vec{l}$ d'une particule dépend de l'origine *O* choisie pour le repère, puisque le vecteur position $\vec{r}$ de la particule en dépend et que, par définition, $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$. Le moment cinétique est donc une grandeur *relative au repère* par rapport auquel on l'exprime.

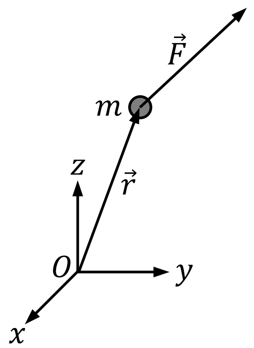
Le moment cinétique $\vec{L}$ *d'un système de particules* est la somme des moments cinétiques de toutes les particules du système :

$$\vec{L} = \sum_i \vec{l}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \tag{5}$$

## Le moment de force

- Définition du moment de force

Supposons que la particule représentée sur la figure ci-contre soit soumise à une force $\vec{F}$. Le **moment de la force** $\vec{F}$, noté $\vec{\tau}$, est défini par le produit vectoriel du vecteur position de la particule et du vecteur force à laquelle elle est soumise :




$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{6}$$

- Caractéristiques du moment de force

Par définition du produit vectoriel, le moment de force est un vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes :

<u>Direction</u>

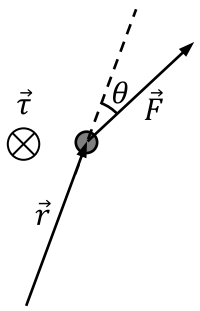
La direction de $\vec{\tau}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{r}$ ainsi qu'au vecteur $\vec{F}$ ; autrement dit, $\vec{\tau}$ est normal au plan engendré par $\vec{r}$ et $\vec{F}$.

<u>Sens</u>

Le sens de $\vec{\tau}$ est donné par la règle de la main droite ou par la règle du tire-bouchon.

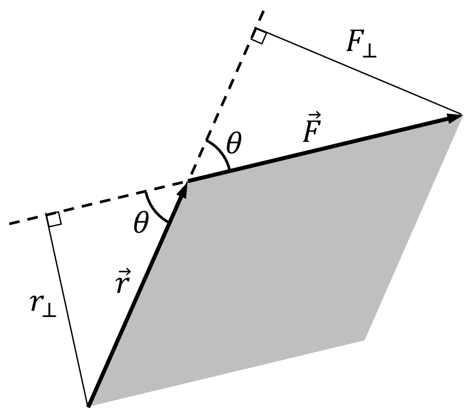
<u>Norme</u>

La norme de $\vec{\tau}$ est donnée par $\tau = rF\sin\theta$ où $\theta$ est l'angle (le plus petit) entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$. Cette norme peut aussi s'exprimer de la manière suivante :




$$\begin{aligned}\tau &= \underbrace{(r\sin\theta)}_{r_\perp} F = r\,\underbrace{(F\sin\theta)}_{F_\perp} \\ &= r_\perp F = rF_\perp\end{aligned} \tag{7}$$

où $r_\perp$ est la composante du vecteur $\vec{r}$ dans la direction perpendiculaire au vecteur $\vec{F}$ ; $r_\perp$ est appelée le **bras de levier** de la force $\vec{F}$. $F_\perp$ quant à elle est la composante du vecteur $\vec{F}$ dans la direction perpendiculaire au vecteur $\vec{r}$, comme l'indique la figure ci-dessous :



Nous voyons aussi sur la figure ci-dessus que cette norme est égale à l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$.

*Dimension et unité*
La norme du moment de force a pour dimension $[\tau] = ML^2/T^2$ qui dans le SI a pour unité le kg·m$^2/s^2$.

<u>*Remarque*</u> : le moment de force $\vec{\tau}$ qui s'exerce sur une particule dépend de l'origine *O* choisie pour le repère, puisque le vecteur position $\vec{r}$ de la particule en dépend et que, par définition, $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$. Le moment de force est donc une grandeur *relative au repère* par rapport auquel on l'exprime.

# 3 Énergie : considérations générales

Avant d'énoncer les théorèmes généraux de la mécanique des particules, en particulier ceux impliquant la grandeur *énergie*, nous exposons l'origine conceptuelle de cette grandeur et définissons la grandeur appelée *travail*.

## Origines conceptuelles de la notion d'énergie

L'énergie est définie à partir de la notion de *travail*, lequel est défini à partir de la notion de force. L'énergie se manifeste sous deux formes fondamentales ; *l'énergie cinétique*, associée au mouvement des particules et *l'énergie potentielle*, associée aux interactions entre particules. Le schéma suivant illustre l'enchaînement des différentes définitions qui conduisent des notions fondamentales d'espace, de temps et de masse à la notion d'énergie :

$$\left.\begin{array}{c}\text{espace et temps} \rightarrow \text{vitesse} \\ \text{masse}\end{array}\right\} \rightarrow \text{quantité de mouvement} \rightarrow \text{force} \rightarrow \text{travail} \rightarrow \text{énergie}$$

À partir de la notion de travail, on introduit la notion de force conservative. Finalement, l'énergie *cinétique* d'une particule s'obtient en calculant le travail de la force résultante (somme des forces) qui s'exerce sur cette particule, et l'énergie *potentielle* en calculant le travail d'une force conservative qui s'exerce sur cette particule :

énergie cinétique = travail de la force résultante
énergie potentielle = travail d'une force conservative

Si les particules du système considéré interagissent par le biais de plusieurs forces conservatives, à chacune de celles-ci correspond une énergie potentielle. C'est la somme des énergies cinétique et potentielles qui obéit à une loi de conservation. Cette somme est appelée *énergie mécanique* :

énergie mécanique = énergie cinétique + somme des énergies potentielles

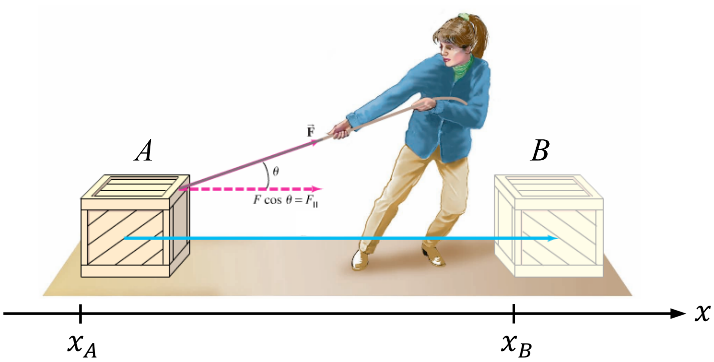
Donnons maintenant l'expression mathématique de ces différentes grandeurs.

## Travail d'une force

- Travail d'une force constante sur un chemin rectiligne

Nous commençons par définir le travail dans un cas simple : une force constante s'exerçant sur un corps en mouvement rectiligne.

Considérons une personne tirant obliquement une caisse avec une force $\vec{F}$ constante (en norme et en orientation) entre deux points $A$ et $B$ d'un chemin $\mathcal{C}$ rectiligne (une droite), lesquels sont repérés par les positions $x_A$, respectivement $x_B$ (où $x_A < x_B$) relativement à un repère dirigé dans le sens du déplacement de la caisse (cf. fig. ci-dessous).



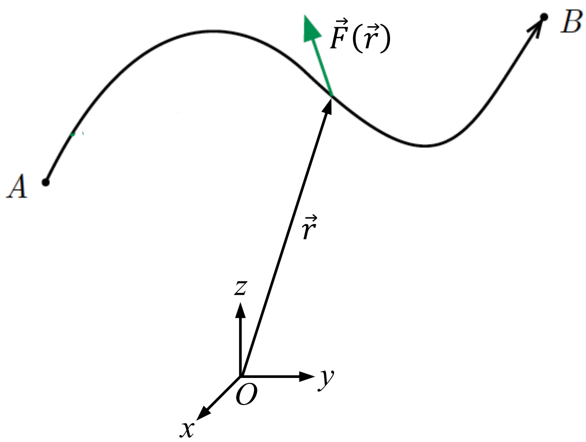

Le **travail** de la force $\vec{F}$ sur le chemin $\mathcal{C}$ entre les points $A$ et $B$ est noté $W_{AB}$ et défini par :

$$W_{AB} = F_{\parallel}(x_B - x_A) = \|\vec{F}\| \cos\theta \, (x_B - x_A) \equiv \|\vec{F}\| \cos\theta \, \Delta x \qquad (8)$$

- Travail d'une force variable sur un chemin curviligne

Nous donnons ici la définition du travail dans le cas le plus général : une force variable s'exerçant sur un corps en mouvement curviligne.

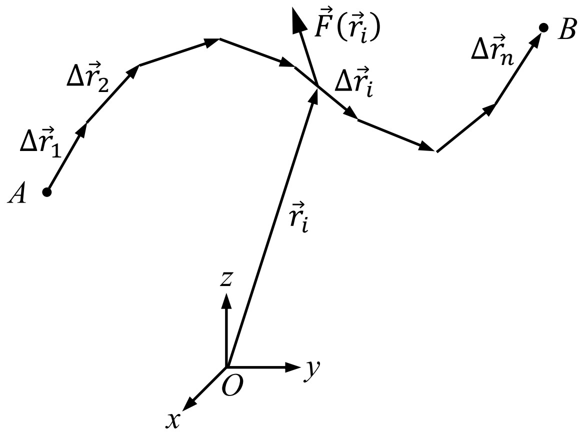
Soit une force $\vec{F}$ agissant sur une particule et supposons que cette force ne dépende que de la position de la particule, cette position étant repérée par un vecteur $\vec{r}$ relativement à un repère $(O,x,y,z)$. On exclut ici les forces qui dépendent de la vitesse de la particule (donc toute force de frottement est exclue) ou qui dépendent *explicitement* du temps.[2] Nous noterons donc cette force $\vec{F}(\vec{r})$ (cf. fig. ci-contre).




[2] Bien sûr, la force dépend *implicitement* du temps, car la position $\vec{r}(t)$ de la particule dépend, elle, du temps. Cependant, elle ne doit pas dépendre du temps autrement que par l'intermédiaire de la position $\vec{r}(t)$.

Considérons une région de l'espace où règne un champ de force[3], deux points $A$ et $B$ de cette région, repérés respectivement par les vecteurs $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$ relativement à un repère $(O,x,y,z)$, et un chemin $\mathscr{C}$ quelconque menant de $A$ à $B$.

Pour calculer le travail sur ce chemin curviligne à partir de la définition (8), on subdivise le chemin $\mathscr{C}$ en $n$ segments isométriques et l'on associe un vecteur déplacement $\Delta\vec{r}_i$ à chacun de ces segments. La position de chacun de ces segments est repérée par le vecteur $\vec{r}_i$. Si la longueur de chacun des segments est suffisamment petite, la variation de la force $\vec{F}(\vec{r}_i)$ le long d'un segment est petite et le travail le long de chaque segment se calcule comme en (8) et vaut approximativement $\|\vec{F}(\vec{r}_i)\| \cos\theta(\vec{r}_i) \, \|\Delta\vec{r}_i\| = \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$, où le dernier terme est le *produit scalaire* des vecteurs $\vec{F}(\vec{r}_i)$ et $\Delta\vec{r}_i$.




Le travail total de la force $\vec{F}(\vec{r})$ sur le chemin $\mathscr{C}$ entre les points $A$ et $B$ est *approximativement* égal à la somme des travaux effectués sur chaque segment :

$$W_{AB} \approx \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i \tag{9}$$

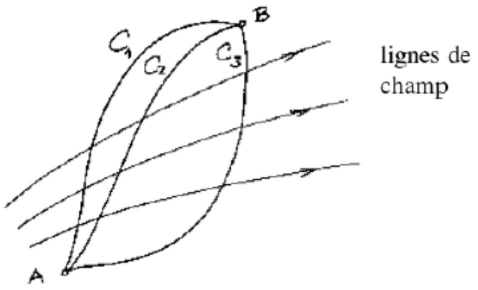
La valeur de ce travail sera d'autant plus proche de sa valeur exacte que le nombre $n$ de segments sera grand et que la longueur $\|\Delta\vec{r}_i\|$ de chacun de ces segments sera par conséquent petite. On obtient la valeur *exacte* de ce travail en faisant tendre le nombre $n$ de segments vers l'infini, les longueurs $\|\Delta\vec{r}_i\|$ tendant par conséquent vers 0. La limite de cette somme d'un nombre infini de termes donne la valeur exacte du travail de la force $\vec{F}(\vec{r})$ sur le chemin $\mathscr{C}$ entre les points $A$ et $B$. Cette limite s'appelle **l'intégrale de chemin** de la fonction vectorielle $\vec{F}(\vec{r})$ et elle se note $\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ :

$$W_{AB} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{10}$$

où $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ est le produit scalaire entre le vecteur force $\vec{F}(\vec{r})$ et le vecteur déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ (cf. Annexe 1). Le travail d'une force est donc une grandeur scalaire.

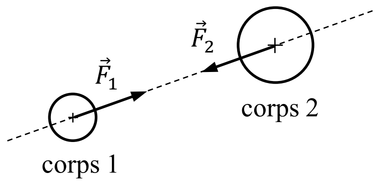
[3] On dit qu'un **champ de force** règne dans une portion de l'espace, si en chaque point de celle-ci, une particule s'y trouvant subit une force.

## Forces conservatives et forces centrales




Définition : Une force est dite **conservative** lorsque le travail de cette force le long d'un chemin *C* reliant deux points *A* et *B* de l'espace, a la même valeur pour tous les chemins reliant *A* et *B*.

- Exemples de forces conservatives :
  - la force gravitationnelle
  - la force électrostatique.
- Exemples de forces non conservatives : les forces de frottement.




Définition : On dit que deux particules (corps) interagissent par le biais d'une force **centrale**, si :

i) Ces deux forces d'interaction ont la même droite d'action, laquelle passe par les deux particules (par le centre de masse des deux corps).

ii) La norme (commune, par la 3ème loi de Newton) de ces deux forces d'interaction ne dépend que de la distance entre les deux particules (entre les centres de masse des deux corps).

*Remarque* : On peut montrer que toute force centrale est conservative (cf. *Annexe 2*).

## Énergie cinétique

Définition : **L'énergie cinétique** d'une particule de masse $m$ et de vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{11}$$

où $v \equiv \|\vec{v}\|$ est la norme du vecteur vitesse de la particule.

Définition : L'énergie cinétique *d'un système de particules* de masses et vitesses respectives $m_i$ et $\vec{v}_i$ est définie par la somme des énergies cinétiques de toutes ses particules :

$$E_{cin} = \sum_i E_{cin_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{12}$$

## Énergie potentielle

Nous définissons d'abord l'énergie potentielle d'une *unique* particule et généralisons ensuite cette définition à un *système de particules*.

- Énergie potentielle d'une unique particule

Supposons qu'une particule n'est soumise qu'à des forces (externes[4]) *conservatives* et notons $\vec{F}(\vec{r})$ la somme de ces forces.
La **variation d'énergie potentielle** $\Delta E_{pot}$ de cette particule entre deux points *A* et *B* de sa trajectoire est définie comme l'opposé du travail de la somme des forces le long d'un chemin quelconque[5] qui relie ces deux points :

$$\Delta E_{pot} \equiv E_{pot}(\vec{r}_B) - E_{pot}(\vec{r}_A) = -W_{\vec{F}} = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \tag{13}$$

<u>*Remarque*</u> : Lorsqu'une particule est soumise à une force conservative, son énergie potentielle diminue au cours de son mouvement. En effet, par définition : $W_{\vec{F}} = -\Delta E_{pot}$

En fixant la valeur de l'énergie potentielle de la particule au point *A* repéré par le vecteur position $\vec{r}_A$, (13) définit **l'énergie potentielle** $E_{pot}(\vec{r})$ de la particule en un point *P* quelconque, repéré par le vecteur position $\vec{r}$ :

$$E_{pot}(\vec{r}) = E_{pot}(\vec{r}_A) - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

L'expression ci-dessus ne détermine $E_{pot}(\vec{r})$ qu'à une constante $E_{pot}(\vec{r}_A)$ près, que nous pouvons choisir arbitrairement. Seule la variation d'énergie potentielle $E_{pot} \equiv E_{pot}(\vec{r}) - E_{pot}(\vec{r}_A)$ entre les points *A* et *P* a un sens physique. Par commodité, on choisit souvent pour *A* un point noté $O$ pour lequel $E_{pot}(\vec{r}_O) = 0$. On obtient alors :

$$E_{pot}(\vec{r}) = -W_{\vec{F}} = -\int_{\vec{r}_O}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}$$

Ainsi, **l'énergie potentielle** d'une particule à la position $\vec{r}$ et soumise à une force *conservative* $\vec{F}$ est définie comme l'opposé du travail de cette force $\vec{F}$ le long d'un chemin quelconque reliant la position $\vec{r}_0$ où l'énergie potentielle de la particule est nulle à la position $\vec{r}$.

---

[4] Par nature, une particule n'a aucune structure interne et ne peut être soumise qu'à des forces *externes*.

[5] Ce chemin est *quelconque* pour deux raisons. D'abord, par hypothèse, les forces sont toutes conservatives et par définition, le travail de chacune de celles-ci le long d'un chemin reliant deux pointss est indépendant du chemin choisi. Ensuite, en vertu du *principe de superposition* des forces, la somme des travaux de plusieurs forces est égale à au travail de la somme de ces mêmes forces : $\sum_i \left(W_{\vec{F}_i}\right) = W_{\sum_i(\vec{F}_i)}$

▪ Énergie potentielle d'un système de particules

Considérons un système constitué de $n$ particules dont les positions respectives sont repérées par les vecteurs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$. Supposons que ces particules ne sont soumises qu'à des forces (internes et externes) *conservatives*. L'**énergie potentielle du système** s'obtient en sommant les énergies potentielles de toutes les particules du système. Cela donne :

$$E_{pot}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = -W_{tot} = \sum_i^n \left(-W_{\vec{F}_i}\right) = \sum_i^n \left(-\int_{\vec{r}_{i_0}}^{\vec{r}_i} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot d\vec{r}_i\right) \qquad (14)$$

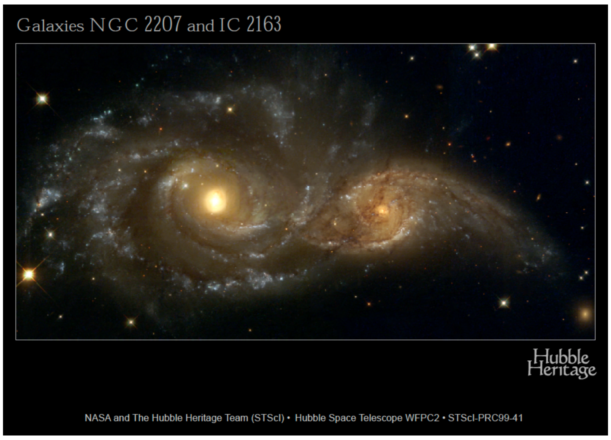
Où :

- $\vec{r}_{i_0}$ est la position de la $i^{\text{ème}}$ particule où son énergie potentielle est nulle par convention
- $\vec{r}_i$ est la position de la $i^{\text{ème}}$ particule
- $\vec{F}(\vec{r}_i)$ est la somme des forces (internes et externes) s'exerçant sur la $i^{\text{ème}}$ particule
- $W_{\vec{F}_i}$ est le travail de la somme des forces (internes et externes) s'exerçant sur la $i^{\text{ème}}$ particule, entre sa position $\vec{r}_{i_0}$ et sa position $\vec{r}_i$

En vertu de l'additivité des forces, l'énergie potentielle $E_{pot}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ du système est entièrement déterminée par les positions respectives $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ des particules qui le composent. L'énergie potentielle *caractérise le système dans son ensemble*.

Il existe différentes formes d'énergies potentielles associées à différentes sortes d'interactions. Mentionnons l'*énergie potentielle gravitationnelle*, notée $E_{p.g}$ , associée à l'interaction gravitationnelle de deux masses $m_1$ et $m_2$ séparées d'une distance $r$. On peut montrer que son expression est donnée par :

$$E_{p.g} = -\frac{m_1 m_2}{r} \qquad (15)$$




**Interaction gravitationnelle de deux galaxies :** Collision entre les deux galaxies spirales NGC 2207 (à gauche) et IC 2163 (à droite). Cette dernière est déjà très déformée par la rencontre et perd rapidement des étoiles et du gaz.

Pour un système constitué de deux particules interagissant gravitationnellement, on a :

$$E_{mec} = E_{cin_1} + E_{cin_2} + E_{p.p} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{m_1 m_2}{r}$$

Si l'une des masses est une planète par exemple, et l'autre un corps de masse très inférieure à celle de la planète et situé à une distance $h$ proche de la surface de cette dernière, cette énergie est appelée *énergie potentielle de pesanteur*, notée $E_{p.p}$, et l'on peut montrer que son expression est donnée par :

$$E_{p.p} = mgh \tag{16}$$

où $m$ est la masse du corps et $g$ l'accélération de pesanteur de la planète.

## Énergie mécanique

À partir de la définition de l'énergie cinétique (12) et de celle de l'énergie potentielle d'un système de particules (14), on définit **l'énergie mécanique d'un système de particules** comme la somme des énergies cinétiques des particules additionnée à l'énergie potentielle du système :

$$E_{mec} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + E_{pot}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \tag{17}$$

# 4 Les lois de Newton

Les systèmes de particules et les corps solides en particulier sont constitués de particules. Par conséquent, les équations du mouvement des systèmes de particules et des corps solides découlent des équations du mouvement de la particule. En ce sens, la dynamique des systèmes de particules et des corps solides n'est pas un problème fondamentalement nouveau. Cependant, elle nécessite l'introduction de nouvelles grandeurs, comme le moment d'inertie, mieux adaptées à la description de ces systèmes.
Les théorèmes généraux de la mécanique des systèmes de particules que nous énonçons à la section suivante découlent des lois de Newton. C'est pourquoi nous commençons par rappeler ces dernières

**Les lois de Newton**, au nombre de trois, mettent en relation le mouvement d'une particule et les forces qu'elle subit. La force et la quantité de mouvement étant des grandeurs vectorielles, ces lois s'expriment en général sous la forme d'équations différentielles vectorielles, c'est-à-dire des équations contenant des grandeurs vectorielles (force et quantité de mouvement) et leur dérivée. Rappelons ces lois, où $\sum_i \vec{F}_i$ est la somme des forces qui s'exercent sur une particule :

- **1ère loi**
  Principe d'inertie
  $$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{cte} \qquad \text{(L1)}$$

- **2ème loi**
  Principe fondamental de la dynamique
  $$\sum_i \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{(L2)}$$

- **3ème loi**
  Principe des actions réciproques
  $$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \qquad \text{(L3)}$$

L'équation (L2) est l'*équation du mouvement* de la mécanique newtonienne ; elle détermine le mouvement d'une particule en fonction des forces qu'elle subit. En se rappelant des définitions de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$ et de la vitesse (instantannée) $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ et en prenant en compte le fait que la masse *d'une particule* est constante, l'équation (L2) s'écrit :

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Cette équation vectorielle regroupe en fait trois équations scalaires, une pour chacune des composantes spatiales $x$, $y$ et $z$ :

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Obtenir le mouvement d'une particule, c'est à dire sa position $\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ à tout instant $t$ à partir des forces qu'elle subit consiste donc à résoudre les équations ci-dessus, à savoir un système de trois équations différentielles du 2ème ordre.

# 5 Les théorèmes généraux de la mécanique des systèmes de particules

Dans cette section, nous énonçons les théorèmes généraux de la mécanique des systèmes de particules, sans les démontrer.

## Théorème de l'énergie cinétique

$$\boxed{W_{tot} = \Delta E_{cin}} \tag{18}$$

*Le travail total de toutes les forces agissant sur toutes les particules d'un système entre une configuration initiale et une configuration finale, est égal la variation d'énergie cinétique du système entre ces deux configurations.*

Cet énoncé nécessite quelques précisions :

- Considérons un système constitué de $n$ particules de positions respectives $\vec{r}_i$. On appelle **configuration** du système, les $3n$ composantes $(x_i, y_i, z_i)$ des postions $\vec{r}_i$.
- On appelle travail *total*, noté $W_{tot}$, la somme des travaux de toutes les forces (externes et internes) agissant sur toutes les particules du système, entre sa configuration initiale et sa configuration finale.
- Selon la définition (12), l'énergie cinétique $E_{cin}$ d'un système de particules est la somme des énergies cinétiques de toutes les particules du système : $E_{cin} = \sum_i E_{cin_i}$.

## 1er Théorème de König

Le 1er théorème de König stipule que l'énergie cinétique totale d'un système de particules en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la somme de deux termes :

- l'énergie cinétique associée au mouvement de translation du centre de masse du système relativement au référentiel $\mathcal{R}$
- l'énergie cinétique des particules du système relativement au référentiel $\mathcal{R}^*$ de son centre de masse, appelée **énergie cinétique interne**

$$\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}} \tag{19}$$

Dans cette équation, le premier terme du membre de droite est l'énergie cinétique *du centre de masse* du système ($v_{cm}$ étant la norme de sa vitesse relativement au référentiel $\mathcal{R}$, et $M$ sa masse totale). Le deuxième terme est l'énergie cinétique *interne* du système ($m_i$ étant la masse de la $i^{ème}$ particule, et $v_i^*$ la norme de sa vitesse relativement au référentiel $\mathcal{R}^*$ du centre de masse). Ainsi, (19) peut s'écrire :

$$E_{cin} = E_{cin_{cm}} + E_{cin_{int}}$$

*Remarques* :

- Ce théorème est valable quel que soit le mouvement du centre de masse, qui peut par exemple être accéléré.
- Il existe le *2ème théorème de König*, analogue au 1er mais traitant du moment cinétique total d'un système de particules.

▪ Cas du corps solide

Définition du corps solide

Un système de particule est appelé **corps solide** si les distances mutuelles entre les particules qui le composent sont constantes au cours du temps. Un corps solide conserve donc sa forme et ses dimensions au cours du temps. Un corps humain, souple et déformable, n'est de loin pas un corps solide ! On peut cependant le considérer comme tel tant qu'une personne maintient son corps dans la même position, quand bien même elle est mouvement, (de rotation et/ou de translation). L'image de la patineuse en haut à gauche du début de la section *Introduction* en est un exemple.

Dans le cas d'un corps solide, le seul mouvement possible des particules du système par rapport au référentiel du centre de masse est un mouvement de rotation. L'énergie cinétique interne du système est alors une énergie cinétique *de rotation* :

$$E_{cin_{int}} = E_{cin_{rot}}$$

Pour un corps solide en rotation autour d'un axe Δ, on peut montrer que son *énergie cinétique de rotation*, notée $E_{cin_{rot}}$, est donné par :

$$E_{cin_{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{20}$$

Avec : $I$ le moment d'inertie et $\omega$ la vitesse angulaire du corps solide relativement à l'axe Δ. Ainsi, l'énergie cinétique du corps solide est donnée par :

$$E_{cin} = E_{cin_{cm}} + E_{cin_{rot}}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I^* {\omega^*}^2} \tag{21}$$

où $I^*$ est le moment d'inertie du corps solide par rapport à un axe de rotation $\Delta^*$ choisi *dans le référentiel du centre de masse*, et $\omega^*$ est la vitesse angulaire du corps solide relativement à l'axe $\Delta^*$.

## Théorème du centre de masse

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_{ext_i} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{CM}} \tag{22}$$

Où :

- $\sum_i \vec{F}_{ext_i}$ : somme des forces *externes* agissant sur toutes les particules du système
- $\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i$ : quantité de mouvement du système (définie plus haut)
- $M \equiv \sum_i m_i$ : somme des masses de toutes les particules du système (masse totale)
- $\vec{a}_{CM}$ : accélération du centre de masse du système

*Remarques* :

Il faut prendre garde à distinguer les forces *externes* agissant sur le système, des forces *internes* au système :

– Les forces *externes* sont celles que subissent les particules du système de la part de particules externes au système (ces dernières *ne faisant pas partie* du système).
– Les forces *internes* sont celles qui s'exercent *entre les particules du système*.
– Le théorème du centre de masse ne fait intervenir *que les forces externes* agissant sur le système.

*Précisions au sujet du centre de masse* :

Considérons un système *isolé* de particules en mouvement relativement à un référentiel (d'inertie) $\mathcal{R}$. On note $m_i$ et $\vec{r}_i$ les masses et vecteurs position respectifs des particules relativement à $\mathcal{R}$. En général, bien que conservée, la quantité de mouvement $\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i$ du système n'est pas nulle dans $\mathcal{R}$. Le **centre de masse** du système, noté CM, est un point d'un référentiel particulier, appelé **référentiel du centre de masse** et noté $\mathcal{R}_{cm}$, dans lequel la quantité de mouvement $\vec{P}^* \equiv \sum_i \vec{p}_i^*$ du système est *nulle*[6]. On peut montrer que le vecteur position $\vec{r}_{cm}$ du centre de masse relativement au référentiel $\mathcal{R}$ est donné par :

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \equiv \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{M} \tag{23}$$

De plus, on a :

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}\right)$$

Où $\vec{v}_{cm}$ est la vitesse du centre de masse du système relativement au référentiel $\mathcal{R}$. Par conséquent :

$$\vec{a}_{cm} = \frac{d^2\vec{r}_{cm}}{dt^2}$$

[6] On peut montrer que pour tout système de particules isolé, un tel référentiel existe.

## Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\sum_i \vec{\tau}_{ext_i} = \frac{d\vec{L}}{dt}} \qquad (24)$$

Où :

- $\sum_i \vec{\tau}_{ext_i}$ est la somme des moments de force *externes* agissant sur toutes les particules du système
- $\vec{L}$ est le moment cinétique du système de particule (défini plus haut).

# 6 Les lois de conservation de la mécanique des systèmes de particules

Sous certaines conditions, les théorèmes généraux énoncés à la section 5 impliquent des lois de conservations auxquelles sont soumis les systèmes de particules.

## Loi de conservation de la quantité de mouvement

Du théorème du centre de masse, il découle les deux résultats suivants :

Résultat 1 :

De (22), il découle,

$$\sum_i \vec{F}_{ext_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} = \overrightarrow{cte}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_{ext_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} = \overrightarrow{cte}} \tag{25}$$

*La somme des forces externes agissant sur un système de particules est nulle si et seulement si sa quantité de mouvement est constante.*

C'est la **loi de conservation de la quantité de mouvement**.

Résultat 2 :

De (22), il découle aussi,

$$\sum_i \vec{F}_{ext_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_{CM} = \overrightarrow{cte}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_i \vec{F}_{ext_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_{CM} = \overrightarrow{cte}} \tag{26}$$

*La somme des forces externes agissant sur un système de particules est nulle si et seulement si son centre de masse est en mouvement rectiligne uniforme.*

## Loi de conservation du moment cinétique

Du théorème du moment cinétique, il découle :

$$\sum_i \vec{\tau}_{ext_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{cte}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_i \vec{\tau}_{ext_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L} = \overrightarrow{cte}} \tag{27}$$

*La somme des moments de force externes agissant sur un système de particules est nulle si et seulement si son moment cinétique est constant.*

C'est la **loi de conservation du moment cinétique**.

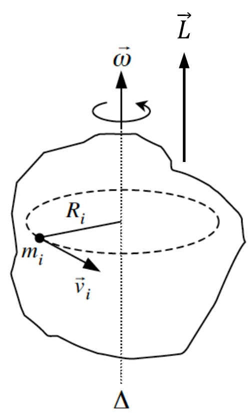
- Cas du corps solide

Pour un corps solide en rotation autour d'un axe $\Delta$, on peut montrer que son moment cinétique $\vec{L}$ est donné par[7] :

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{28}$$

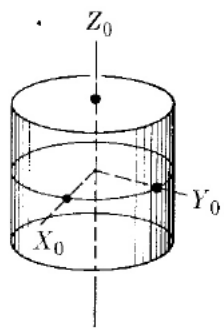
Avec :

- $\vec{\omega}$ le vecteur vitesse angulaire du corps ; la direction de ce vecteur est donc celle de l'axe de rotation $\Delta$ (par définition du vecteur $\vec{\omega}$) et sa norme $\omega$ est égale à la vitesse angulaire du corps (en rad/s) autour de l'axe $\Delta$. Cette relation implique que les vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{L}$ ont la même direction (cf. fig. ci-contre).




[7] La relation $\vec{L} = I\vec{\omega}$ n'est pas satisfaite pour tout axe de rotation. On peut cependant montrer que pour tout corps solide, quelle que soit sa forme, il existe au moins trois axes de rotation, mutuellement orthogonaux et passant par le centre de masse du corps, pour lesquels cette relation est satisfaite. Ces axes particuliers sont appelés **axes principaux d'inertie**. Si l'axe de rotation $\Delta$ d'un corps solide *n'est pas* un axe principal d'inertie, son moment cinétique total $\vec{L}$ n'est pas parallèle à l'axe $\Delta$ et la direction de $\vec{L}$ varie au cours du temps. Un moment de force $\vec{\tau}$ extérieur et perpendiculaire à l'axe $\Delta$ doit alors être exercé sur le corps pour maintenir fixe l'orientation de l'axe $\Delta$. Une patineuse en rotation dispose naturellement les différentes parties de son corps de sorte que son axe de rotation soit un axe principal d'inertie d'une part, et qu'il soit vertical d'autre part (en plaçant son centre de masse verticalement au-dessus du point de contact entre son patin et la glace), sans quoi elle serait animée d'un mouvement supplémentaire, une *précession*. Mais ce dernier point est une autre histoire !

- $I$ le **moment d'inertie** du corps. Le moment d'inertie est au mouvement de rotation ce que la masse est au mouvement de translation ; il mesure la capacité d'un corps à s'opposer à la modification de sa vitesse angulaire autour d'un axe de rotation. Plus la masse du corps est éloignée de l'axe de rotation, plus son moment d'inertie par rapport à celui-ci est grand et plus il est difficile de modifier sa vitesse angulaire et inversement. C'est une grandeur scalaire dont l'unité est le kg·m$^2$. Le moment d'inertie d'un objet donné dépend de l'axe de rotation autour duquel il tourne. Par exemple, le moment d'inertie du cylindre de la figure ci-contre n'est pas le même si ce dernier est en rotation autour de l'axe $X_0$ que s'il est en rotation autour de l'axe $Z_0$.




Pour un *corps solide*, la loi de conservation du moment cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{\sum_i \vec{\tau}_{ext_i} = \vec{0} \Leftrightarrow I\vec{\omega} = \overrightarrow{cte}} \qquad (29)$$

## Loi de conservation de l'énergie mécanique

Du théorème de l'énergie cinétique, il découle le résultat suivant :

| |
|---|
| Si un système de particules satisfait les conditions suivantes :<br>i) la somme des forces *externes* agissant sur le système est nulle<br>ii) les particules du système n'interagissent que par le biais de forces *conservatives*<br>*alors l'énergie mécanique du système est constante.* |

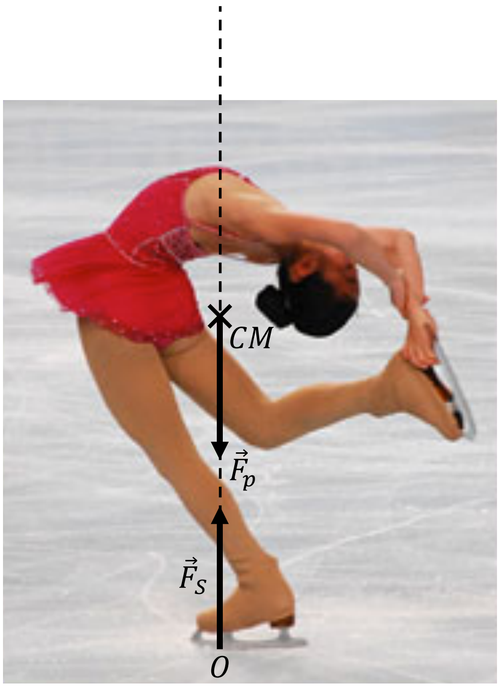
C'est la **loi de conservation de l'énergie mécanique**.

# 7 Étude du mouvement de la patineuse

Pour étudier le mouvement de la patineuse, nous devons commencer par choisir un référentiel. Nous choisissons naturellement le référentiel de la patinoire.
Ensuite, nous devons recenser les forces et moments de force *externes* s'exerçant sur la patineuse.

- Les forces externes

Nous supposons que les forces de frottement (exercé par la glace et l'air) sont négligeables. Les forces externes agissant sur la patineuse sont donc sa force de pesanteur $\vec{F}_p$ et la force de soutien de la glace $\vec{F}_s$ (cf. fig. ci-dessous).




Ces deux forces se compensent, en vertu de la 3$^{\text{ème}}$ loi de newton : $\vec{F}_p + \vec{F}_s = \vec{0}$. Par conséquent, la somme des forces externes s'exerçant sur la patineuse peut être considérée comme nulle :

$$\sum_i \vec{F}_{ext_i} = \vec{0}$$

En conséquence, par le résultat 2 de la loi de conservation de la quantité de mouvement, la vitesse du centre de masse de la patineuse est constante relativement au référentiel de la patinoire, en l'occurrence cette vitesse est nulle.

$$\vec{v}_{CM} = \vec{0}$$

- Les moments de force externes

Il faut commencer par choisir l'origine $O$ du repère par rapport auquel on exprime les moments de force. Nous plaçons l'origine au point de contact entre le patin et la glace (cf. fig. ci-dessus). Les droites d'action des deux forces précitées passent par l'origine $O$, leurs moments de force respectifs sont donc nuls. La somme des moments de forces externes s'exerçant sur la patineuse est donc nulle :

$$\sum_i \vec{\tau}_{ext_i} = \vec{0}$$

Ainsi, la loi de conservation du moment cinétique est applicable à notre patineuse, son moment cinétique gardant la même valeur à tout instant :

$$\vec{L} = I\vec{\omega} = \overrightarrow{cte}$$

Ce que l'on peut noter :

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$$
$$I_1\vec{\omega}_1 = I_2\vec{\omega}_2$$

où les indices 1 et 2 se réfèrent à deux instants différents.

Ceci nous permet de comprendre comment la patineuse modifie sa vitesse de rotation. En rapprochant les différentes parties de son corps de son axe de rotation, elle diminue son moment d'inertie *I*. Comme son moment cinétique $L = I\omega$ garde la même valeur[8] (il est conservé), une diminution de son moment d'inertie *I* s'accompagne d'une augmentation de sa vitesse angulaire de rotation $\omega$ de sorte que le produit $I\omega$ reste le même. En attribuant l'indice 1 à une situation initiale correspondant à un certain moment d'inertie et à une certaine vitesse angulaire, et l'indice 2 à une situation finale correspondant à un autre moment d'inertie et à une autre vitesse angulaire, la loi de conservation du moment cinétique s'écrit :

$$L_1 = L_2$$
$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$
$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1$$

Nous voyons dans cette dernière équation que, selon le rapport du moment d'inertie initial par le moment d'inertie final, la vitesse angulaire finale sera supérieure ou inférieure à la vitesse angulaire initiale. Par exemple, si la patineuse rapproche les bras de son corps, elle diminue son moment d'inertie ( $I_1/I_2 > 1$ ) et augmente donc sa vitesse angulaire, puisque $\omega_2 = \underbrace{(I_1/I_2)}_{>1}\omega_1 > \omega_1$.

[8] Comme la direction du moment cinétique est constante, on peut s'affranchir de la notation vectorielle.

- L'énergie mécanique de la patineuse

Maintenant que nous avons compris pourquoi le moment cinétique de la patineuse est conservé et comment celle-ci exploite cette loi de conservation pour modifier à sa guise sa vitesse angulaire, nous allons nous intéresser à son énergie mécanique :

$$\begin{aligned} E_{mec} &= E_{cin} + E_{pot} \\ &= E_{cin_{cm}} + E_{cin_{rot}} + E_{pot} \\ &= \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 + Mgh \end{aligned}$$

Comme mentionné plus haut, $v_{cm} = 0$. De plus, en choisissant l'altitude $h = 0$ au niveau du centre de masse de la patineuse de sorte à annuler son énergie potentielle de pesanteur[9], *l'énergie mécanique de la patineuse est entièrement sous forme d'énergie cinétique de rotation* :

$$E_{mec} = E_{cin_{rot}} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

Le moment cinétique $L = I\omega$ de la patineuse étant conservé, cela implique que son énergie mécanique $E_{mec} = \frac{1}{2} I\omega^2$ *n'est pas conservée.* En effet, la conservation du moment cinétique de la patineuse permet d'écrire :

$$\begin{gathered} L_1 = L_2 \\ I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} \end{gathered}$$

D'où :

$$I_1 \neq I_2 \Leftrightarrow \omega_1 \neq \omega_2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 2E_{mec_1} &= 2E_{cin_{rot_1}} = I_1\omega_1^2 = (I_1\omega_1)\omega_1 \\ &= (I_2\omega_2)\omega_1 \neq (I_2\omega_2)\omega_2 = I_2\omega_2^2 = 2E_{cin_{rot_2}} = 2E_{mec_2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{E_{mec_1} \neq E_{mec_2}}$$

---

[9] On a toujours la liberté de choisir la position de l'origine du repère, ici l'altitude 0, où bon nous semble, car les lois de la physique sont indépendantes de ce choix.

Puisque, comme nous l'avons vu, la somme des forces externes s'exerçant sur la patineuse est nulle, notre athlète est assimilable à un système isolé. Il semble à priori que la non-conservation de son énergie mécanique soit en désaccord avec la loi de conservation de l'énergie ! C'est cette apparente incohérence que l'on a baptisée :

## *L'énigme de la patineuse ...*

Pour lever cette contradiction, nous allons combiner trois des quatre théorèmes généraux que nous avons énoncés dans la section 5, pour obtenir une équation qui nous sera utile. Rappelons ici ces trois théorèmes :

- Théorème de l'énergie cinétique : $W_{tot} = \Delta E_{cin}$ (théorème 1)
- 1er théorème de König : $E_{cin} = E_{cin_{cm}} + E_{cin_{rot}}$ (théorème 2)
- Théorème du centre de masse : $\sum_i \vec{F}_{ext_i} = M\vec{a}_{CM}$ (théorème 3)

Dans le théorème 1, comme $W_{tot} = W_{ext} + W_{int}$, avec :
- $W_{ext}$ : somme des travaux des forces *externes*
- $W_{int}$ : somme des travaux des forces *internes*

on peut l'écrire :

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_{cin}$$

En substituant le théorème 2 dans cette dernière équation, on obtient :

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta\left(E_{cin_{cm}} + E_{cin_{rot}}\right) = \Delta E_{cin_{cm}} + \Delta E_{cin_{rot}}$$

D'où :

$$W_{ext} + W_{int} = \Delta E_{cin_{cm}} + \Delta E_{cin_{rot}}$$

Le théorème 3 implique que dans l'équation ci-dessus, $W_{ext}$ correspond à $\Delta E_{cin_{cm}}$ et $W_{int}$ correspond à $\Delta E_{cin_{rot}}$[10]. L'équation ci-dessus peut donc être séparée en deux équations indépendantes :

$$W_{ext} = \Delta E_{cin_{cm}} \qquad \text{(théorème 1a)}$$

$$W_{int} = \Delta E_{cin_{rot}} \qquad \text{(théorème 1b)}$$

Autrement dit, le théorème de l'énergie cinétique peut être appliqué séparément au centre de masse du système et à la totalité du système, ce qui simplifie considérablement l'étude du mouvement d'un système de particule.

- Appliquons le théorème 1a à notre patineuse :

Les deux forces externes agissant sur la patineuse – sa force de pesanteur $\vec{F}_p$ et la force de soutien $\vec{F}_s$ de la glace – n'accomplissent aucun travail. En effet, leurs points d'application respectifs sont au repos relativement au référentiel de la patinoire[11]. Par conséquent, la somme des travaux des forces *externes* est nulle : $W_{ext} = 0$. D'où :

$$\Delta E_{cin_{cm}} = 0$$

ce qui est cohérent avec le fait que $\vec{v}_{cm} = \vec{0}$, comme mentionné plus haut.

- Considérons maintenant le théorème 1b :

Comme mentionné plus haut, pour la patineuse, $E_{mec} = E_{cin_{rot}}$ et le théorème 1b s'écrit :

$$\boxed{W_{int} = \Delta E_{mec}}$$

Cette dernière équation exprime le fait suivant :

| |
|---|
| *C'est le travail des forces internes au système qui en fait varier l'énergie mécanique.* |

Ce résultat élucide *en partie* l'énigme de la patineuse.

Si les particules du système (les différentes parties du corps de la patineuse) n'interagissent *que* par le biais de forces internes conservatives[12], il correspond à la somme des travaux internes $W_{int}$ une énergie potentielle interne $E_{pot_{int}}$ obéissant à la relation (cf. section *Énergie potentielle*) :

$$W_{int} = -\Delta E_{pot_{int}}$$

---

[10] En effet, une variation de l'énergie cinétique $E_{cin_{cm}}$ du centre de masse ne peut être due qu'à une variation de la norme de sa vitesse $\vec{v}_{cm}$ (car $E_{cin_{cm}} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$), c'est-à-dire à une accélération $\vec{a}_{cm}$ de son centre de masse. Or, le théorème du centre de masse (théorème 3) stipule que *seule* la somme des forces externes $\sum_i \vec{F}_{ext_i}$ exercée sur le système peut en être la cause : $\vec{a}_{CM} = \sum_i \vec{F}_{ext_i}/M$.

[11] Comme mentionné plus haut $\vec{v}_{cm} = \vec{0}$. Or, le point d'application de $\vec{F}_p$ est le centre de masse d'une part et d'autre part, le point d'application de $\vec{F}_s$ - le point de contact patin-glace - est immobile relativement au centre masse.

[12] Cette hypothèse sera confirmée plus bas.

En substituant cette relation dans le théorème 1b, on obtient :

$$\Delta E_{cin_{rot}} = -\Delta E_{pot_{int}}$$

Ou encore :

$$\boxed{\Delta E_{mec} = -\Delta E_{pot_{int}}}$$

Cette dernière équation exprime le fait suivant :

| |
|---|
| *Le travail des forces conservatives et internes au système transforme l'énergie mécanique de ce dernier en énergie potentielle interne et inversement.* |

Ainsi, quand la patineuse fait varier sa vitesse angulaire, son énergie potentielle interne varie de la manière suivante :

- En augmentant sa vitesse angulaire, son énergie mécanique augmente et elle transforme de l'énergie potentielle interne en énergie mécanique :

$$\omega \uparrow \Rightarrow E_{mec} \uparrow \Rightarrow E_{pot_{int}} \rightarrow E_{mec}$$

- En diminuant sa vitesse angulaire, son énergie mécanique diminue et elle transforme de l'énergie mécanique en énergie potentielle interne :

$$\omega \downarrow \Rightarrow E_{mec} \downarrow \Rightarrow E_{mec} \rightarrow E_{pot_{int}}$$

Lors de ces transformations d'énergie potentielle interne en énergie mécanique et inversement, aucune énergie ne se perd cependant. Ceci apparaît dans la dernière équation puisque la diminution d'énergie mécanique *est égale* à l'augmentation d'énergie potentielle interne et inversement :

$$\Delta E_{mec} = -\Delta E_{pot_{int}}$$

ou encore :

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_{pot_{int}} = 0$$

$$\Delta\left(E_{mec} + E_{pot_{int}}\right) = 0$$

En définissant l'**énergie totale** du système, notée $U$, par :

$$U = E_{mec} + E_{pot_{int}}$$

L'équation ci-dessus s’écrit :

$$\boxed{\Delta U = 0}$$

Cette dernière équation exprime la *loi de conservation de l'énergie*. Elle généralise la loi de conservation de l'énergie mécanique, en englobant une forme d'énergie supplémentaire, l'énergie potentielle interne au système.

# 8 Forces et énergie potentielle internes à l'œuvre dans le système patineuse

Il nous reste encore à comprendre deux points concernant la transformation d'énergie mécanique de la patineuse en énergie potentielle interne et inversement, lorsque sa vitesse angulaire varie :

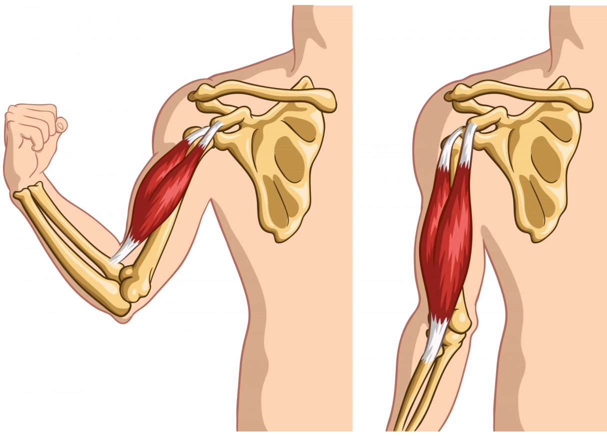
i) Quelles sont les forces internes accomplissant le travail nécessaire à ces transformations et de quelle manière ce travail s'effectue-t-il ?

ii) Sous quelle forme l'énergie potentielle interne de la patineuse est-elle emmagasinée ?

- Les forces internes

Pour augmenter sa vitesse angulaire, la patineuse doit rapprocher certaines parties de son corps, ses bras par exemple, de son axe de rotation[13]. Pour ce faire, une force est nécessaire, exercée par un muscle sur l'os de son bras. Plus précisément, un muscle est un organe inséré sur les os, formé de fibres, dont les contractions produisent les mouvements des différentes parties du corps. Ainsi, les forces internes sont exercées entre deux parties du corps de la patineuses (deux os) par l'intermédiaire d'un muscle qui se contracte.

<u>*Remarque*</u> : Les deux os sur lesquels les extrémités d'un muscle (les tendons) sont insérées, pivotent l'un par rapport à l'autre autour de leur articulation commune.
Lorsque le muscle est complètement décontracté, il n'exerce aucune force sur les deux os. En se contractant, il exerce une force sur chacun des os, ce qui les fait pivoter l'un par rapport à l'autre. Les muscles ne peuvent donc faire pivoter des os *qu'en se contractant* (cf. fig. ci-contre).



- Le travail des forces internes

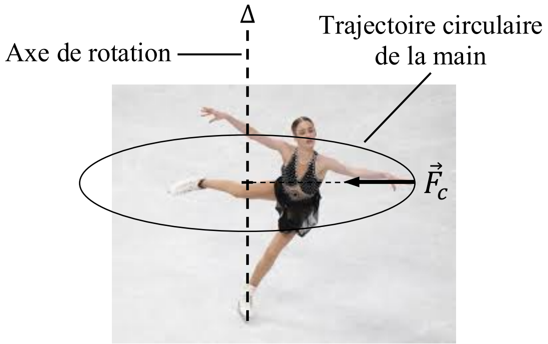
<u>Cas 1</u> : Patineuse en MCU

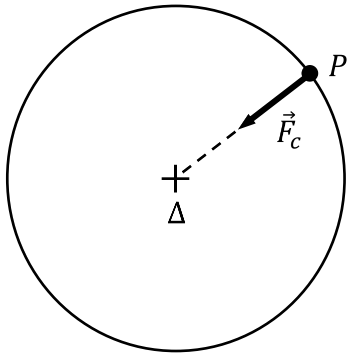
Lorsque la patineuse est en rotation à vitesse angulaire constante, chaque partie de son corps, l'une de ses mains par exemple, est en mouvement circulaire uniforme. Dans ce cas, cette main est soumise à une force interne et centripète $\vec{F}_c$, laquelle n'accomplit aucun travail puisqu'elle est perpendiculaire à la trajectoire circulaire à tout instant (cf. fig. ci-dessous)[14].

---

[13] Elle diminue ainsi son moment d'inertie $I$.

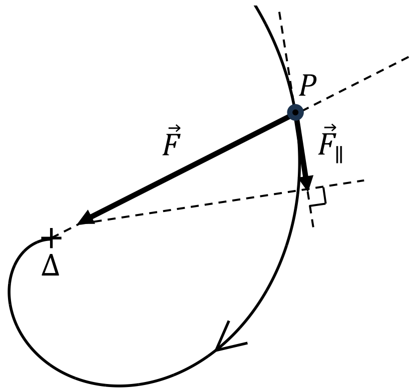
[14] En effet, par définition, le travail est donné par $W_{AB} = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$. Par conséquent, si la force $\vec{F}(\vec{r})$ est perpendiculaire au déplacement infinitésimal $d\vec{r}$, leur produit scalaire $\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ est nul. En effet le produit scalaire de deux vecteurs perpendiculaires est toujours nul (cf. Annexe 1 Le produit scalaire).




<u>Cas 2</u> : Augmentation de la vitesse angulaire

Lorsque la patineuse, pour *accroître* sa vitesse angulaire, *rapproche* sa main de son axe de rotation Δ, cette main est soumise à une force interne $\vec{F}$ dirigée vers l'axe de rotation. De plus, la droite d'action de cette force intercepte l'axe de rotation, et ce, perpendiculairement. La trajectoire de la main est alors une spirale.



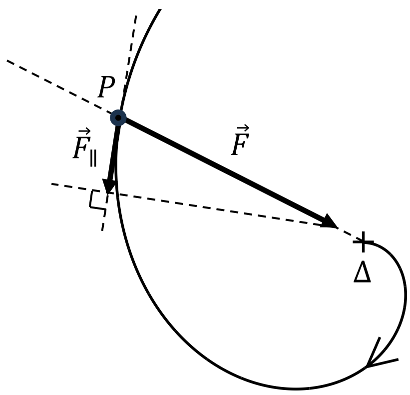

Nous voyons sur la figure ci-contre que dans ce cas, cette force n'est plus perpendiculaire à la trajectoire. De plus, sa composante $\vec{F}_{\parallel}$ tangente à la trajectoire est dirigée *dans le sens* du mouvement. Par conséquent, le travail de la force le long de cette spirale est *positif*. Ainsi, en vertu du théorème 1b :

| |
|---|
| *Le travail de cette force interne augmente l'énergie mécanique de la patineuse lorsque sa vitesse angulaire augmente.* |

En effet, comme, $W_{int} = \Delta E_{cin_{rot}} = \Delta E_{mec}$, alors $W_{int} > 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} > 0$.

<u>Cas 3</u> : Diminution de la vitesse angulaire

Lorsque la patineuse, pour *diminuer* sa vitesse angulaire, *éloigne* sa main de son axe de rotation Δ, cette main est soumise à une force interne $\vec{F}$ dirigée vers l'axe de rotation. De plus, la droite d'action de cette force intercepte l'axe de rotation, et ce, perpendiculairement. La trajectoire de la main est alors une spirale.




Nous voyons sur la figure ci-contre que dans ce cas, la composante $\vec{F}_{\parallel}$ de cette force, tangente à la trajectoire, est dirigée dans le sens *opposé* à celui du mouvement. Par conséquent, le travail de la force le long de cette spirale est *négatif*. Ainsi, en vertu du théorème 1b :

| |
|---|
| *Le travail de cette force interne diminue l'énergie mécanique de la patineuse lorsque sa vitesse angulaire diminue.* |

En effet : $W_{int} < 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} < 0$.

Dans le cas 2 comme dans le cas 3, nous voyons sur les figures correspondantes ci-dessus que la droite d'action de la force interne s'exerçant sur la main passe à tout instant par le même point : le point d'intersection entre l'axe de rotation de la patineuse et le plan horizontal auquel appartient la trajectoire en spirale de la main. Cette force interne est donc centrale et par conséquent, elle est *conservative* (cf. section *Forces conservatives et forces centrales*).
C'est le cas pour toute autre partie du corps de la patineuse, subissant une force interne l'approchant ou l'éloignant de l'axe de rotation. Ceci confirme l'hypothèse émise plus haut, à savoir que les différentes parties du corps de la patineuse n'interagissent que par le biais de forces internes conservatives.

- L'énergie potentielle interne

Pour identifier la forme sous laquelle l'énergie potentielle interne de la patineuse est emmagasinée, nous considérons les différentes parties de son corps et les muscles qui leur sont rattachés.
Des résultats qui précèdent, on déduit que :
- l'énergie potentielle interne est maximale lorsque l'énergie mécanique est minimale
- l'énergie mécanique (cinétique de rotation) est minimale lorsque la vitesse angulaire est minimale
- la vitesse angulaire est minimale lorsque les différentes parties du corps sont le plus éloignées de l'axe de rotation ; dans ce cas, les muscles qui leur sont rattachés sont le moins contractés

Ainsi, l'énergie potentielle interne de la patineuse est d'autant plus grande que les différentes parties de son corps sont éloignées de son axe de rotation.

Donc :

| |
|---|
| *L'énergie potentielle interne de la patineuse est déterminée par les distances entre les différentes parties de son corps et son axe de rotation. Plus grandes sont ces distances, plus grande est son énergie potentielle interne et inversement.* |

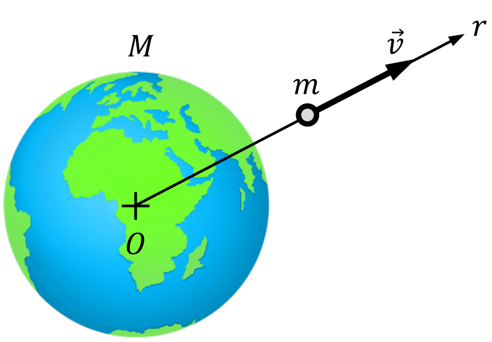
<u>*Remarque*</u> : L'énergie potentielle interne de la patineuse (en rotation) est déterminée par la distribution spatiale de sa masse relativement à son axe de rotation.

- Analogies

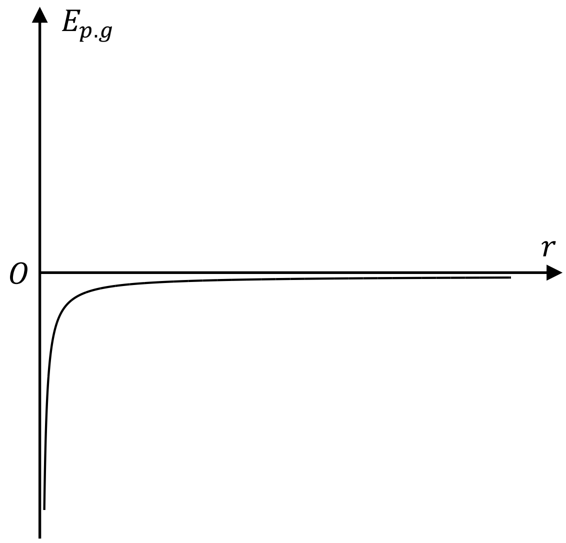
De manière générale, remarquons que l'énergie potentielle interne d'un système est déterminée par la distribution spatiale de sa masse. Pour l'illustrer, étudions les deux systèmes physiques suivants :

i) <u>Analogie 1</u> : Chute libre

Considérons le système constitué d'une planète (sphérique) et d'un projectile lancé depuis sa surface. On admet que ce système est isolé et que le projectile a une masse négligeable par rapport à celle de la planète. Par exemple, une pierre lancée verticalement vers le haut depuis le sol terrestre (cf. fig. ci-contre).



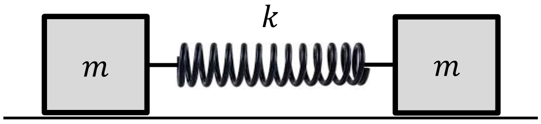
Le centre de masse du système est (presque) situé au centre de la Terre et l'on se place dans le référentiel terrestre pour décrire le mouvement de la pierre.
En prenant pour origine du repère le centre de la Terre, l'énergie potentielle interne du système est sous forme d'énergie potentielle gravitationnelle, donnée par
$E_{p.g} = -GmM/r$, où $G$ est la constante de gravitation universelle, $m$ et $M$ sont les masses respectives de la pierre et de la Terre, et $r$ est la distance séparant la pierre du centre de la Terre (cf. fig. ci-contre).



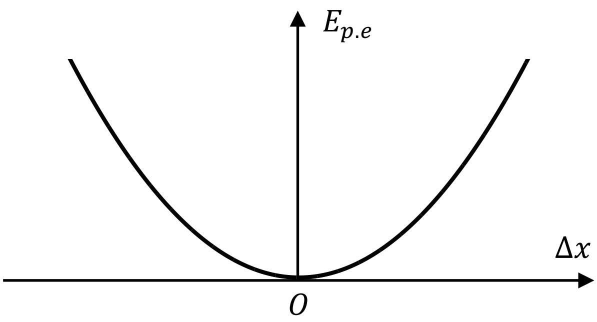

<u>Remarque</u> : Cette énergie potentielle est toujours négative.

En lançant la pierre vers le haut, lorsque celle-ci s'élève, sa vitesse diminue et sa distance au centre de la Terre augmente. Ainsi, l'énergie cinétique du système diminue et son énergie potentielle gravitationnelle augmente.
Dans cet exemple, l'énergie potentielle interne du système est d'autant plus grande que la distance séparant la plus faible masse du centre de masse du système est grande.

ii) <u>Analogie 2</u> : Oscillateur masses-ressort
Considérons un ressort de masse négligeable reliant deux masses identiques oscillant sur un support horizontal sans frottement ni amortissement, de sorte que ce système est assimilable à un système isolé (cf. fig. ci-dessous).
.




Le centre de masse du système est à tout instant situé à mi-distance des deux masses. Il est au repos et l'on se place dans le référentiel de ce dernier pour décrire les oscillations des deux masses.
L'énergie potentielle interne du système est sous forme d'énergie potentielle élastique, donnée par $E_{p.e} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$ , où $k$ est la constante de rappel du ressort et $\Delta x$ la déformation du ressort - allongement ou contraction - (cf. fig. ci-contre).




Au cours des oscillations des masses, lorsque la déformation du ressort augmente (en s'allongeant ou en se contractant), la vitesse des masses diminue. Ainsi, l'énergie cinétique du système diminue et son énergie potentielle élastique augmente.

Dans cet exemple, l'énergie potentielle interne du système est d'autant plus grande que la distances séparant chaque masse de sa position d'équilibre est grande.
Ces deux analogies et le cas de la patineuse en rotation ont en commun la propriété suivante : l'énergie potentielle interne du système est d'autant plus grande que les masses qui le constituent sont éloignées d'une région de l'espace, caractéristique du système, à savoir :

– le centre de masse pour le système Terre-pierre
– les positions d'équilibre respectives des masses pour l'oscillateur
– l'axe de rotation pour la patineuse

Rappelons ici qu'une énergie potentielle est, par définition, le travail d'une force conservative. Pour la patineuse, cette force conservative est interne et exercée par ses muscles sur les différentes parties de son corps. On peut donc appeler cette force, la **force musculaire**, et l'énergie potentielle interne qui lui est associée, l'**énergie potentielle musculaire**.

Ceci spécifie la forme sous laquelle l'énergie potentielle interne de la patineuse est emmagasinée et élucide *L'énigme de la patineuse*.

# 9 Conclusion

- C’est en modifiant les distances entre les différentes parties de son corps et son axe de rotation, que la patineuse modifie sa vitesse angulaire. Ce faisant, son moment cinétique est conservé (il ne varie pas) mais son énergie mécanique, au contraire, varie.
- C’est le travail des forces internes au système, c’est-à-dire le travail des forces musculaires s’exerçant entre les différentes parties du corps de la patineuse qui fait varier son énergie mécanique.
- Ces forces internes musculaires étant conservatives car centrales, le travail total qu’elles accomplissent transforme l'énergie mécanique de la patineuse en énergie potentielle interne musculaire et inversement.
- L’énergie potentielle interne musculaire de la patineuse est d’autant plus grande que les distances entre les différentes parties de son corps et son axe de rotation sont grandes, et que ses muscles sont, par conséquent, décontractés.
- La loi de conservation de l'énergie est donc bien respectée dans le cas de la patineuse, à condition d'englober l'énergie potentielle interne musculaire dans le bilan d'énergie.

*La compréhension donne des ailes …*

PR

# 10 Annexes

## Annexe 1 Le produit scalaire

- Définition

Considérons deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dont les coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $(O, x, y, z)$ sont respectivement $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.
Le **produit scalaire** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\vec{a} \cdot \vec{b}$, est une opération qui, à ces deux vecteurs fait correspondre un nombre réel défini par :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Propriétés

– commutativité : $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
– distributivité par rapport à l'addition (vectorielle) : $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
– associativité avec la multiplication par un nombre réel : $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$
– $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \forall\vec{b} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{0}$
– $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

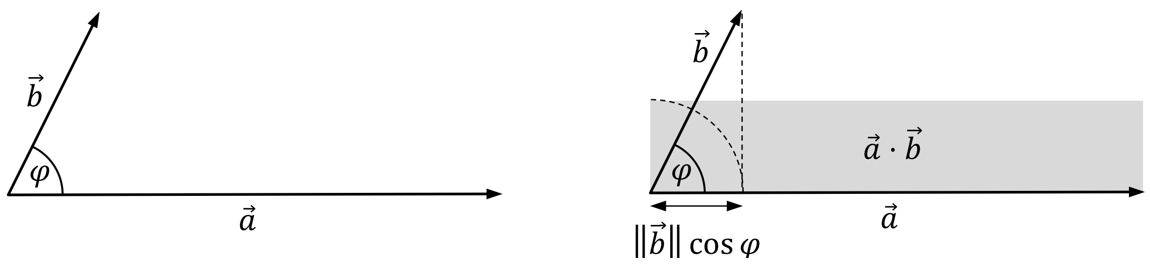
À partir du produit scalaire, on définit la **norme** d'un vecteur $\vec{a}$, notée $\|\vec{a}\|$, comme la racine carrée du produit scalaire de $\vec{a}$ avec lui-même :

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Le produit scalaire a aussi la propriété suivante :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\varphi$$

où $\varphi$ est l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On déduit de la dernière propriété ci-dessus que le produit scalaire de deux vecteurs est égal à l'aire du rectangle dont un côté a la longueur de l'un des vecteurs ($\|\vec{a}\|$), et l'autre côté a la longueur de la projection orthogonale de l'autre vecteur sur le premier ($\|\vec{b}\| \cos\varphi$), comme l'illustre la figure ci-dessous.



- Cas particuliers

i) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ parallèles : $\varphi = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

ii) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ antiparallèles : $\varphi = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = -\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

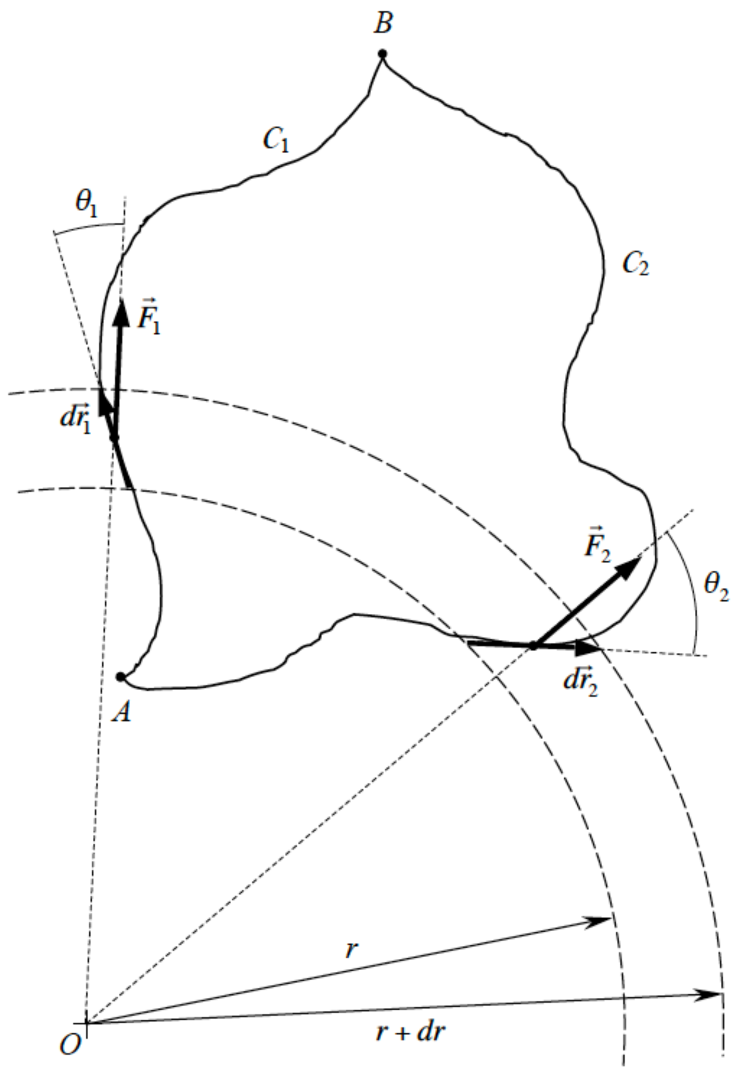
iii) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ perpendiculaires : $\varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

# Annexe 2 Toute force centrale est conservative

Nous montrons dans cette annexe que toute force centrale est conservative.

Sur la figure ci-dessous existe une force centrale dont le centre de force est le point $O$. Deux chemins quelconques notés $C_1$ et $C_2$ relient les points $A$ et $B$ de l'espace. Les courbes en pointillés sont des arcs de cercle centrés en $O$. Considérons le travail de la force centrale sur les portions $d\vec{r}_1$ et $d\vec{r}_2$ des courbes $C_1$ et $C_2$ situées entre les deux arcs de cercle. Sur chacune de ces portions, ce travail est égal à $\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1$ respectivement $\vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2$. Remarquons que l'on peut considérer le produit scalaire $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdr\cos\theta$ aussi bien comme la projection de $\vec{F}$ sur $d\vec{r}$ que celle de $d\vec{r}$ sur $\vec{F}$. Les grandeurs $F_1$ et $F_2$ sont égales sur les deux segments car elles se trouvent à des distances égales du point $O$ :

$$F_1 = F_2$$



D'autre part, les projections $dr\cos\theta$ des portions de chemin sur les vecteurs $\vec{F}$ respectifs sont égales, car la distance séparant les arcs de cercle, mesurée le long de la direction de $\vec{F}_1$ est égale à celle mesurée le long de la direction de $\vec{F}_2$. Ainsi :

$$dr_1\cos\theta_1 = dr_2\cos\theta_2$$

Les deux équations précédentes permettent d'écrire :

$$F_1 dr_1\cos\theta_1 = F_2 dr_2\cos\theta_2$$

D'où :

$$\vec{F}_1\cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_2\cdot d\vec{r}_2$$

sur les portions de chemin considérées. Nous pouvons alors recommencer le même raisonnement pour toutes les portions de chemin, pour ainsi obtenir :

$$\underbrace{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{C_1} = \underbrace{\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{C_2}$$

que l'on peut aussi noter :

$$\underbrace{W_{AB}}_{C_1} = \underbrace{W_{AB}}_{C_2}$$

où $\underbrace{W_{AB}}_{C_1}$ est le travail de la force centrale le long du premier chemin $C_1$ reliant *A* et $B$ et $\underbrace{W_{AB}}_{C_2}$ le travail de la force centrale le long du deuxième chemin $C_2$ reliant *A* et *B,* ce qui achève notre démonstration.

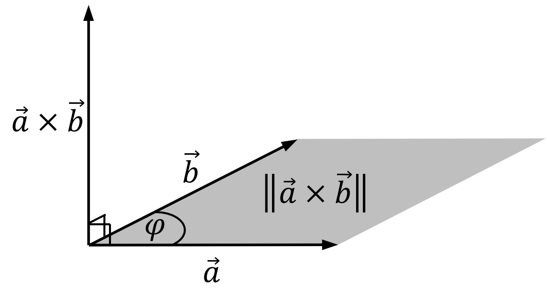
Il résulte de cette démonstration, que la force gravitationnelle et la force électrostatique sont des forces conservatives, puisque centrales.

## Annexe 3 Le produit vectoriel

- Définition

Considérons deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dont les coordonnées cartésiennes dans un repère orthonormé $(O, x, y, z)$ sont respectivement $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

Le **produit vectoriel** des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\vec{a} \times \vec{b}$ , est une opération qui, à ces deux vecteurs fait correspondre un troisième vecteur dont les caractéristiques sont les suivantes (cf. fig. ci-contre) :



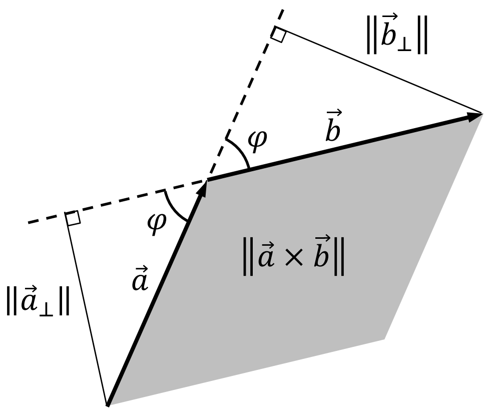

*Direction*
La direction de $\vec{a} \times \vec{b}$ est perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$ ainsi qu'au vecteur $\vec{b}$. Autrement dit, $\vec{a} \times \vec{b}$ est normal au plan engendré par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

*Sens*
Le sens de $\vec{a} \times \vec{b}$ est donné par la règle de la main droite ou par la règle du tire-bouchon.

*Norme*
La norme de $\vec{a} \times \vec{b}$ est l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ (cf. fig. ci-dessus). Nous voyons sur la figure ci-dessous que cette aire est donnée par $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \sin\varphi$, où $\varphi$ est l'angle (le plus petit) entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Cette norme peut aussi s'exprimer de la manière suivante :

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \underbrace{(\|\vec{a}\| \sin\varphi)}_{\|\vec{a}_\perp\|} \|\vec{b}\| = \|\vec{a}\| \underbrace{(\|\vec{b}\| \sin\varphi)}_{\|\vec{b}_\perp\|} = \|\vec{a}_\perp\|\|\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}_\perp\|$$

où $\|\vec{a}_\perp\|$ est la norme de la composante du vecteur $\vec{a}$ dans la direction perpendiculaire au vecteur $\vec{b}$ et $\|\vec{b}_\perp\|$ est la norme de la composante du vecteur $\vec{b}$ dans la direction perpendiculaire au vecteur $\vec{a}$, comme l'indique la figure ci-dessous :



- Propriétés

- antisymétrie : $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
- distributivité par rapport à l'addition (vectorielle) : $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- associativité avec la multiplication par un nombre réel : $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, où $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires

- Cas particuliers

i) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ colinéaires : $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$
Par conséquent, le produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même est nul : $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

ii) $\vec{a}$ et $\vec{b}$ perpendiculaires : $\varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

- Coordonnées cartésiennes

On peut montrer que les coordonnées cartésiennes du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ et $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ sont données par :

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$