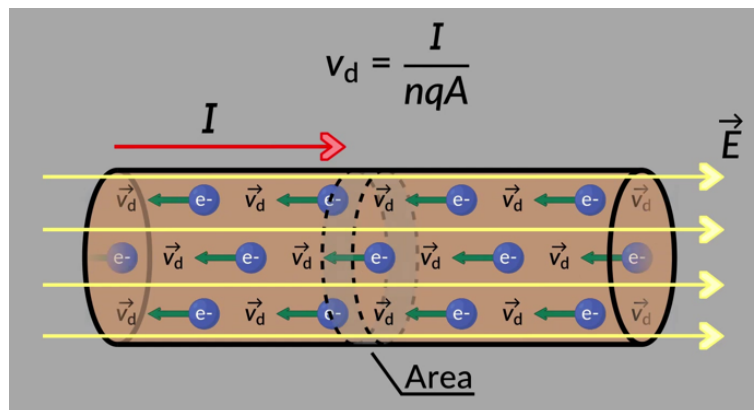
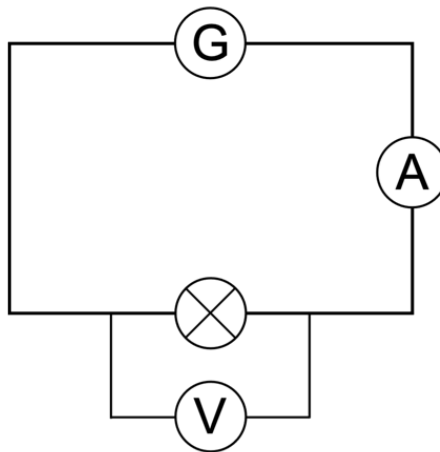


RELATION TENSION-INTENSITÉ POUR UNE AMPOULE ÉLECTRIQUE À INCANDESCENCE



*Pascal Rebetez
Juillet 2025*

TABLE DES MATIÈRES

1.	Introduction	3
2.	Courant électrique dans un conducteur métallique : description microscopique.....	6
3.	Du macroscopique au microscopique : interprétation microscopique de la loi d'Ohm	8
3.1.	Correspondance entre intensité et densité de courant	8
3.2.	Correspondance entre tension et champ électrostatique	14
3.3.	Interprétation microscopique de la loi d'Ohm	16
3.4.	Analogie microscopique de la loi d'Ohm.....	18
4.	Du microscopique au macroscopique : relation tension-intensité pour une ampoule à incandescence.....	20
4.1.	Exposé de la démarche.....	20
4.2.	L'hypothèse microscopique	20
4.3.	Calcul de la relation tension-intensité pour une ampoule à incandescence	21
4.4.	Analogie microscopique de la relation tension-intensité en régime non linéaire.....	22
5.	Ajustement de la courbe théorique aux mesures	24
6.	Définition généralisée de la résistance	27
7.	Récapitulation des résultats	28
8.	Méthode expérimentale pour déterminer la valeur du paramètre microscopique φ	29
9.	Conclusion.....	30

1. Introduction

En soumettant les extrémités d'un conducteur métallique à une différence de potentiel – ou tension – constante notée ΔV , en les connectant par exemple aux bornes d'un générateur, on établit dans le conducteur un courant électrique caractérisé par une intensité I , constante elle aussi. L'intensité I du courant circulant dans le conducteur dépend de la tension ΔV entre ses extrémités.

Par définition, la **résistance** d'un conducteur, notée R , est le rapport entre la tension aux bornes du conducteur et l'intensité du courant qui le traverse :

$$R = \frac{\Delta V}{I}$$

L'unité de la résistance est donc le V/A appelé Ohm, de symbole Ω , en hommage à Georg Simon Ohm (1789-1854).

Les métaux ont la propriété remarquable suivante : la tension qui leur est appliquée est *proportionnelle* à l'intensité du courant qui les traverse, pour autant que leur température soit maintenue constante. Autrement dit, la résistance des métaux (à température constante) est indépendante de la tension qui leur est appliquée. Cette relation de proportionnalité entre la tension et l'intensité es appelée **loi d'Ohm**, c'est une loi *empirique* que l'on note :

$$\boxed{\Delta V = RI}$$

Le graphique ci-dessous représente les mesures de la tension en fonction de l'intensité effectuées pour un conducteur obéissant à la loi d'Ohm (cf. Fig. 1). L'alignement des points traduit la proportionnalité entre ΔV et I et la pente de la droite ajustée correspond à la résistance constante du conducteur :

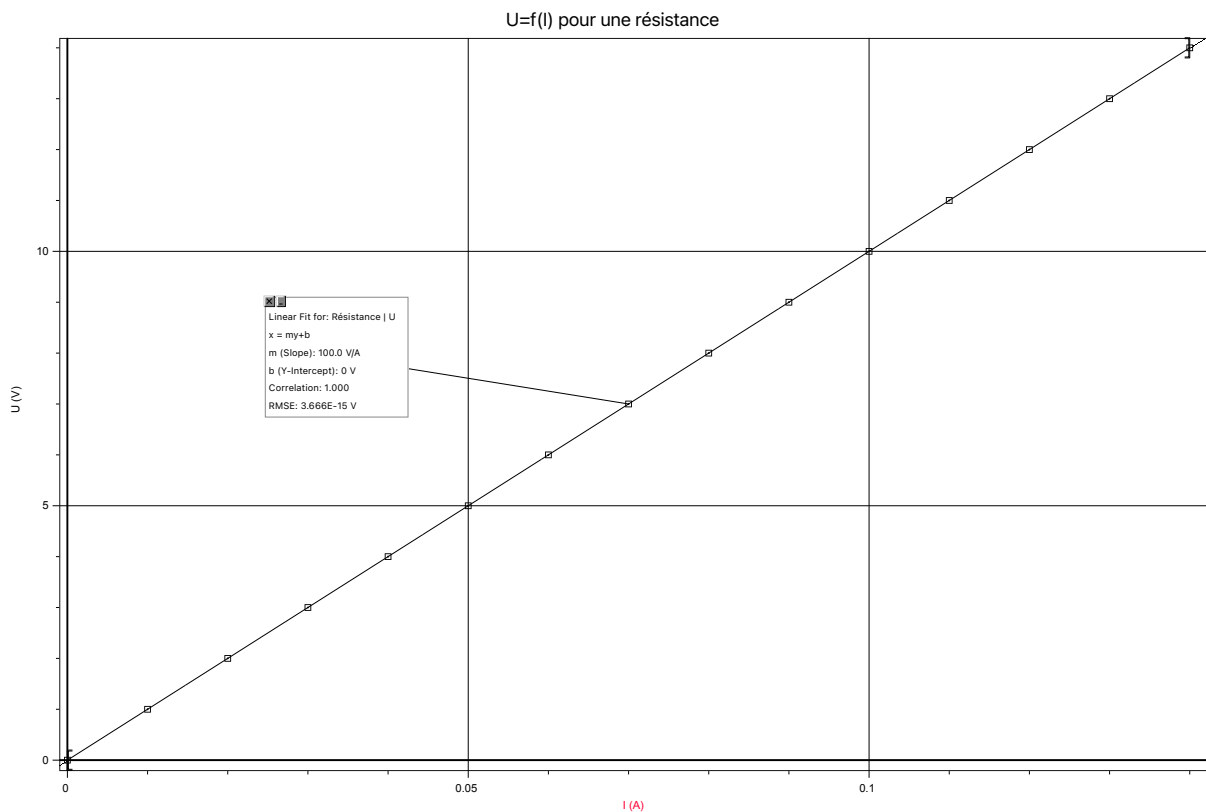


Fig. 1 : Tension en fonction de l'intensité pour un conducteur ohmique.

Si les métaux maintenus à température constante obéissent à la loi d'Ohm, il n'en n'est pas de même pour tous les conducteurs. En effet, il existe de nombreux conducteurs dont la relation entre ΔV et I n'est pas proportionnelle, et différentes relations existent selon le matériau conducteur considéré. Parmi les conducteurs n'obéissant pas à la loi d'Ohm, citons les ampoules électriques à incandescence. Le graphique ci-dessous représente les mesures de la tension en fonction de l'intensité, effectuées pour une ampoule à incandescence (cf. Fig. 2).

Nous voyons qu'en-dessous d'une certaine intensité (environ 50 mA), les points décrivent une droite, traduisant ainsi une relation de proportionnalité entre la tension et l'intensité, c'est-à-dire un comportement ohmique.

En-dessus de 50 mA en revanche, les points décrivent une courbe strictement croissante, traduisant ainsi une relation *non linéaire* entre la tension et l'intensité.

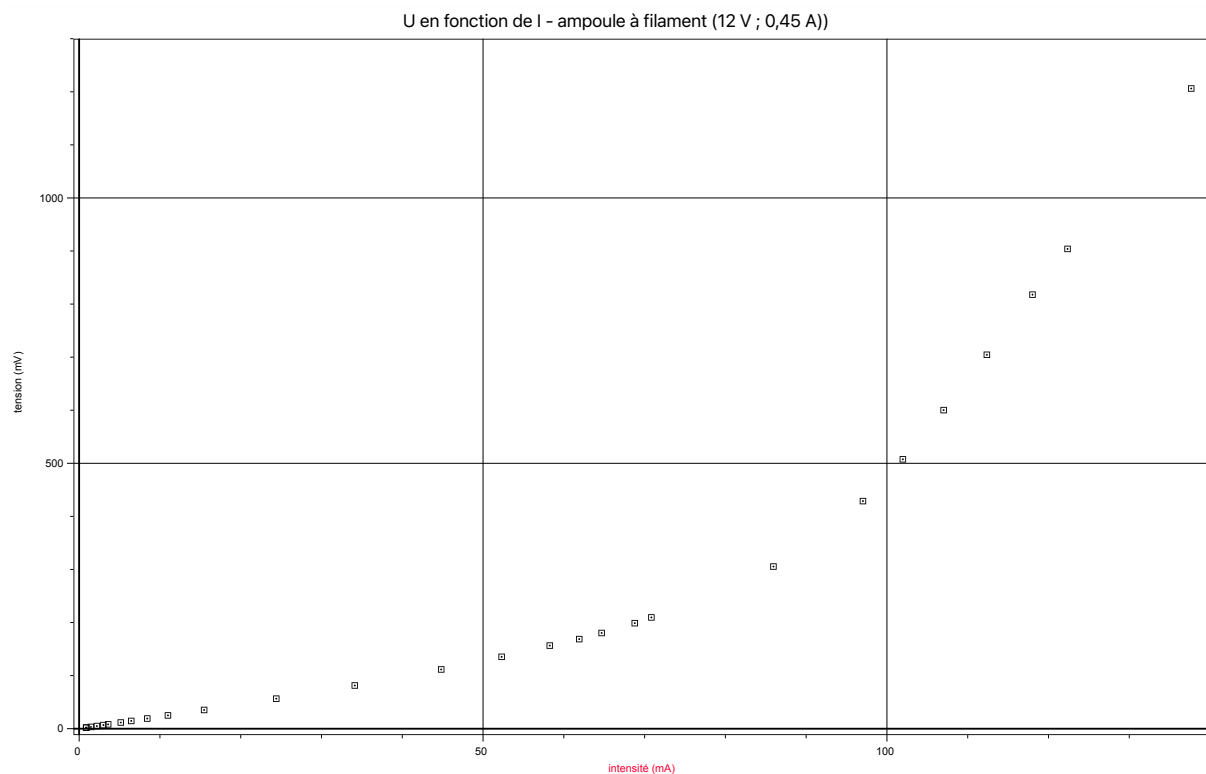


Fig. 2 : Tension en fonction de l'intensité pour une ampoule à incandescence.

L'objectif de ce travail est d'obtenir l'équation de cette courbe, c'est à dire la relation mathématique entre la tension et l'intensité pour une ampoule à incandescence, dans son régime non-linéaire.

2. Courant électrique dans un conducteur métallique : description microscopique

Même si la description complète de la conduction électrique relève de la *mécanique quantique*, le *modèle classique des électrons libres* permet d'établir une relation entre la résistivité¹ d'un conducteur et le mouvement de ses électrons libres, cette relation étant confirmée expérimentalement dans certains cas.

Dans un métal, un certain nombre d'électrons sont libres² ; ils ne sont liés à aucun atome et sont animés d'un mouvement aléatoire, comme les molécules d'un gaz confiné dans un récipient. Les orientations et les normes des vecteurs vitesse des électrons libres changent brusquement et continuellement à cause des collisions de ces derniers avec les ions positifs (les noyaux atomiques) du conducteur. Cependant, *entre deux collisions*, un électron étant supposé libre, son vecteur vitesse demeure constant et son mouvement est donc rectiligne uniforme (cf. Fig. 3 - lignes pointillées).

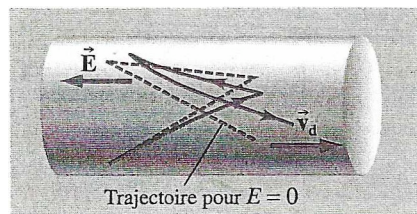


Fig. 3 : Trajectoire d'un électron de conduction sans champ électrique (lignes droites pointillées) et en présence d'un champ électrique constant et uniforme (courbes pleines et paraboliques).

En l'absence de champ électrique extérieur, les vitesses des électrons libres sont orientées aléatoirement, si bien que *vectériellement*, la moyenne de leur vitesse est nulle à tout instant et il n'y a par conséquent aucun écoulement mesurable d'électrons dans une direction donnée.

Lorsqu'on applique au conducteur un champ électrique extérieur $\vec{E}$ supposé constant et uniforme, chaque électron est soumis à une accélération constante³ $\vec{a} = -e\vec{E}/m$ (cf. Fig. 3 - courbes pleines et paraboliques). En notant Δt le temps écoulé entre deux collisions d'un électron avec les ions du métal, la variation $\Delta\vec{v}$ du vecteur vitesse de l'électron entre deux collisions⁴ vaut donc $\Delta\vec{v} = \vec{a}\Delta t$, c'est à dire :

$$\Delta\vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{m}\Delta t \quad (1)$$

Nous voyons en (1) que le vecteur $\Delta\vec{v}$ a la même direction que celle du vecteur $\vec{E}$ (et un sens opposé à celui-ci), et ce *pour tous les électrons libres* du conducteur.

¹ La résistivité sera définie plus bas.

² Ces électrons sont appelés **électrons libres** ou encore **électrons de conduction**.

³ En vertu de la 2^{ème} loi de Newton.

⁴ Où $\Delta t \equiv t_2 - t_1$ et $\Delta\vec{v} \equiv \vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1) \equiv \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

L'énergie cinétique acquise par un électron entre deux collisions, donnée par :

$$\Delta\varepsilon_{cin} = \frac{1}{2}m\|\vec{v}_2\|^2 - \frac{1}{2}m\|\vec{v}_1\|^2 \quad (2)$$

est *intégralement* transférée aux ions du conducteur pendant la collision, sous forme d'énergie de vibration⁵, de sorte que chaque électron conserve *la norme* de sa vitesse aléatoire après une collision⁶. Ce transfert intégral d'énergie s'explique par le fait que l'intensité du courant est constante dans le conducteur (puisque celui-ci est soumis à une tension ΔV supposée constante), ce qui correspond microscopiquement à un mouvement d'ensemble des électrons de conduction à *vitesse constante*, appelée vitesse de dérive (cf. équation (3)), comme nous le montrerons à la section 3. Ainsi, l'acquisition d'énergie cinétique par les électrons entre deux collisions sous l'effet du champ $\vec{E}$, n'a pas pour effet d'augmenter l'énergie cinétique *de leur mouvement d'ensemble*. On en déduit (par la loi de conservation de l'énergie) que l'énergie cinétique acquise par les électrons entre deux collisions est entièrement transformée en énergie de vibration des ions du conducteur pendant les collisions.

Le temps Δt écoulé entre deux collisions d'un électron avec les ions du conducteur dépend de la norme et de l'orientation du vecteur vitesse de l'électron après chaque collision, ainsi que de la distance entre les ions. Δt prend donc différentes valeurs et pour cette raison, nous devons considérer *la moyenne* de ces temps sur l'ensemble des électrons libres du conducteur. Cette moyenne est appelée **temps moyen entre collisions** et est notée τ . En utilisant le temps moyen τ dans l'équation (1), la variation de vitesse $\Delta\vec{v}$ correspondante à celui-ci est une *variation moyenne* du vecteur vitesse d'un électron lors d'une collision, appelée **vitesse de dérive**, notée $\vec{v}_d$ (cf. Fig. 3) et donnée par :

$$\vec{v}_d = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau \quad (3)$$

Le temps moyen τ est une propriété du matériau, ne dépendant *que* de la nature et de la température de ce dernier. On peut montrer qu'en revanche, τ ne dépend *pas* du champ électrique extérieur $\vec{E}$, du fait que la vitesse de dérive v_d est très inférieure aux vitesses aléatoires des électrons libres.

Nous voyons en (3) que $\vec{v}_d \propto -\vec{E}$. L'application d'un champ électrique extérieur $\vec{E}$ (constant et uniforme) à un conducteur a donc pour effet de produire un mouvement d'ensemble des électrons de conduction de ce dernier, en sens opposé à celui du champ extérieur $\vec{E}$. La vitesse moyenne de ce mouvement d'ensemble est la vitesse de dérive définie en (3). Ce mouvement d'ensemble des électrons de conduction constitue ainsi un courant électrique macroscopiquement mesurable (cf. Fig. 4).

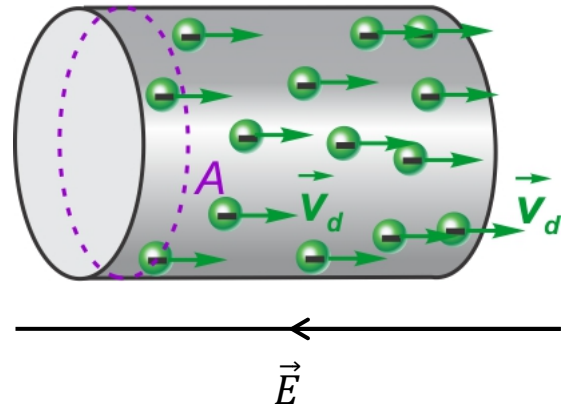


Fig. 4 : Vitesse de dérive des électrons de conduction en présence d'un champ électrique $\vec{E}$ (constant et uniforme).

⁵ Cette augmentation d'énergie de vibration des tous les ions du conducteur correspond à une augmentation de son énergie thermique et cause une augmentation de sa température.

⁶ En effet : $\Delta\varepsilon_{cin} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{v}_2\| = \|\vec{v}_1\|$

3. Du macroscopique au microscopique : interprétation microscopique de la loi d'Ohm

Dans cette section, nous donnons une interprétation microscopique de la loi d'Ohm.

La tension ΔV , l'intensité I et la résistance R sont des grandeurs macroscopiques ; elles caractérisent le conducteur dans sa globalité. À ces trois grandeurs macroscopiques correspondent des grandeurs analogues, microscopiques et locales⁷, qui nous seront nécessaires pour établir une formulation microscopique de la loi d'Ohm.

3.1. Correspondance entre intensité et densité de courant

Considérons un courant électrique stationnaire⁸ traversant une surface macroscopique quelconque notée S . Pour décrire l'intensité I de ce courant traversant S à partir de grandeurs physiques *microscopiques*, subdivisons la surface S en éléments de surfaces infinitésimales dS , décrites respectivement par des vecteurs surface $d\vec{S}$ (cf. fig. 5).

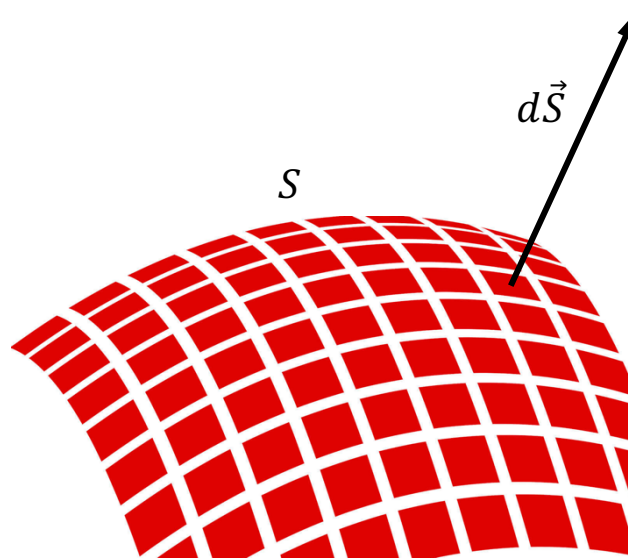


Fig. 5 : Surface S subdivisée en éléments de surfaces infinitésimales dS , décrites par des vecteurs $d\vec{S}$.

Commençons par étudier l'intensité dI du courant traversant une surface infinitésimale dS . Considérons tout d'abord un courant dont les porteurs de charge sont des électrons (de charge e) ayant tous la même vitesse (constante) $\vec{v}$ (cf. fig. 6).

⁷ C'est à dire définies en un point de l'espace.

⁸ C'est à dire constant au cours du temps, en tout point de la surface S .

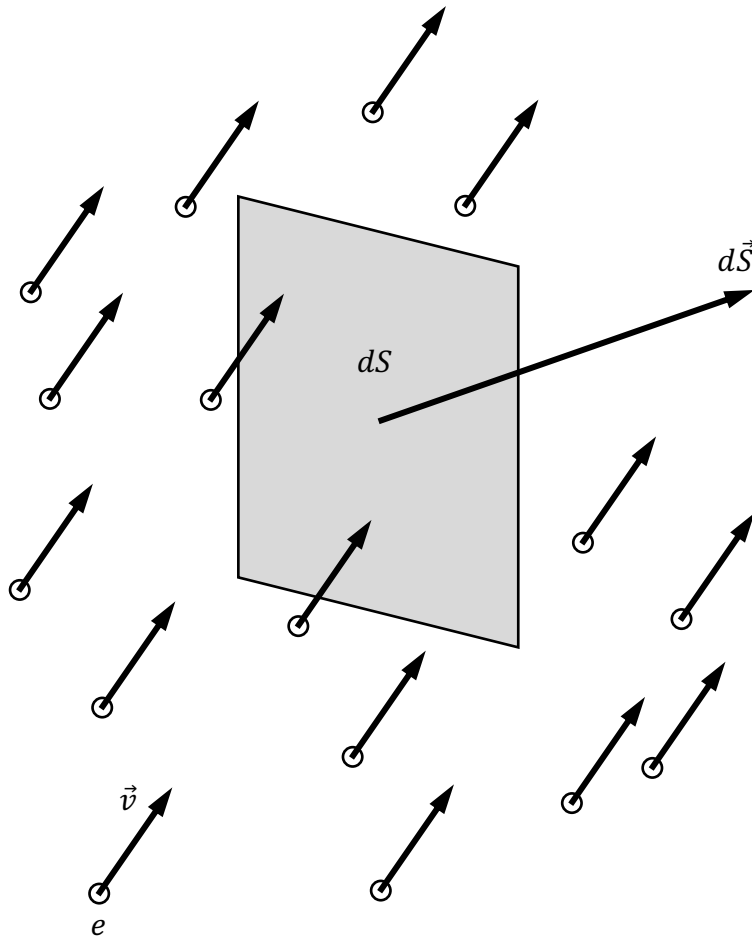


Fig. 6 : Surface dS dans un courant d'électrons de charge e et de même vitesse $\vec{v}$.

Comme $dI = dq/dt$, cherchons l'expression de la charge dq traversant la surface dS pendant l'intervalle de temps dt .

Parmi tous les électrons présents sur la figure 6, ceux qui traverseront la surface dS après un intervalle de temps dt doivent satisfaire les deux conditions suivantes :

- i) leur trajectoire (rectiligne) traverse la surface dS
- ii) ils sont situés à une distance d de la surface dS , telle que $d \leq vdt$

Les électrons remplissant ces deux conditions sont tous situés dans un prisme oblique⁹ (cf. fig. 7) dont :

- l'une des bases est la surface dS et l'autre, une surface identique (et parallèle) à dS
- les quatre arêtes isométriques (et colinéaires entre elles) reliant les bases sont colinéaires au vecteur $\vec{v}$ et ont pour longueur $d = vdt$ (cf. fig. 7)

⁹ Le prisme de la fig. 7 est *oblique*, car ses quatre arêtes isométriques ne sont pas colinéaires au vecteur surface $d\vec{S}$ de ses bases. Autrement dit, elles ne sont pas normales à ses bases.

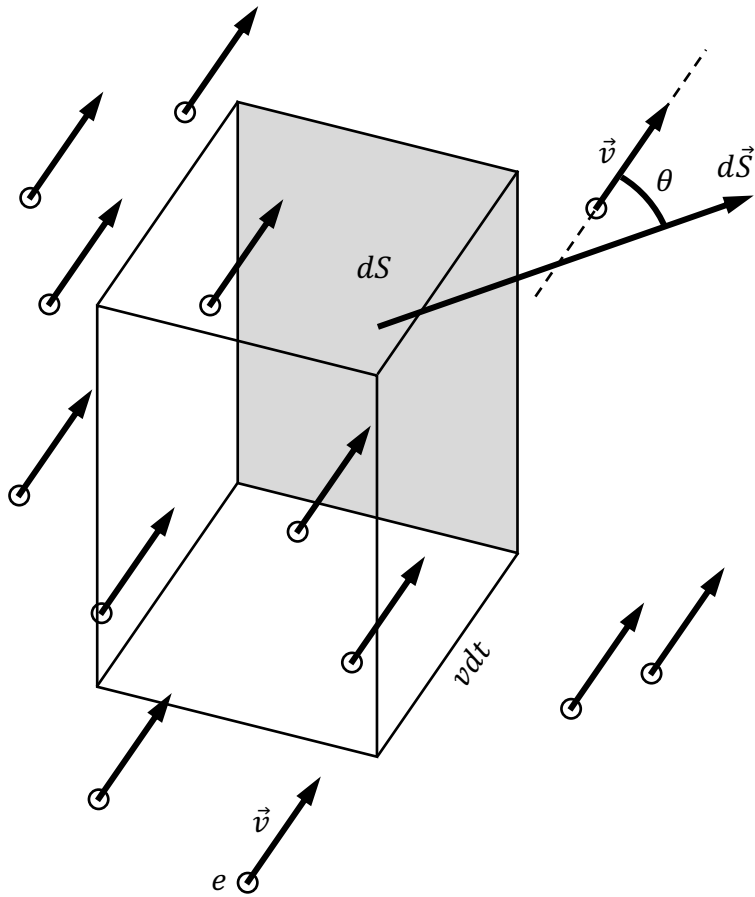


Fig. 7 : Les électrons qui traverseront la surface dS après un intervalle de temps dt sont tous situés dans un prisme oblique de bases dS , d'arêtes isométriques de longueur $d = vdt$ et colinéaires au vecteur $\vec{v}$.

On note θ l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur surface $d\vec{S}$ (cf. fig. 7 et 8) :

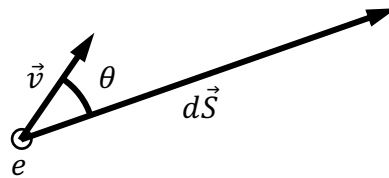


Fig. 8 : On note θ l'angle entre le vecteur vitesse $\vec{v}$ et le vecteur surface $d\vec{S}$.

Intermède : volume d'un prisme oblique

Soit un prisme oblique (cf. fig. 9 à droite). En notant :

S : l'aire de chacune de ses bases (identiques et parallèles)

d : la longueur de ses quatre arêtes isométriques (et colinéaires)

h : sa hauteur, qui n'est autre que la distance séparant ses bases

θ : l'angle entre ses arêtes isométriques et une droite normale à ses bases

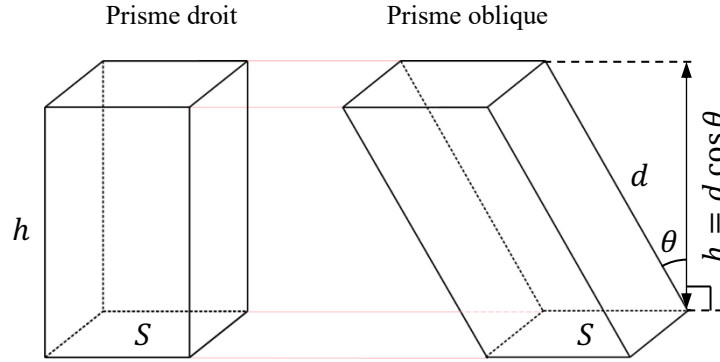


Fig. 9 : Prisme droit et prisme oblique de même base.

Le volume du prisme oblique, noté V , est donné par :

$$\begin{aligned} V &= \text{aire d'une base} \times \text{hauteur du prisme oblique} \\ &= Sh \end{aligned}$$

où $h = d \cos \theta$ (cf. fig. 9). On a alors :

$$V = Sd \cos \theta$$

Ainsi, le volume d'un prisme oblique est égal à celui d'un prisme droit de mêmes bases et de même hauteur.

En appliquant ce résultat au calcul du volume dV du prisme oblique de la figure 7, on a¹⁰ :

$$dV = dS v dt \cos \theta = \underbrace{v dS \cos \theta}_{\vec{v} \cdot d\vec{S}} dt = \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \quad (4)$$

On note n le rapport du nombre N d'électrons par le volume infinitésimal dV qui les contient :

$$n = \frac{N}{dV} \quad (5)$$

¹⁰ La troisième égalité de l'équation (4) découle de la définition du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta$, où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. De plus, sur la fig. 7, les arêtes isométriques du prisme oblique sont colinéaires au vecteur vitesse $\vec{v}$ des électrons, ce dernier formant un angle θ avec le vecteur surface $d\vec{S}$ des bases du prisme (cf. fig. 7 et 8). Par conséquent, l'angle θ apparaissant dans l'équation (4) mesure bien l'angle entre les arêtes isométriques du prisme oblique et une droite normale à ses bases.

n a pour unité $1/\text{m}^3$, c'est la **densité volumique des porteurs de charge**.

La charge dq présente dans le prisme oblique de volume dV de la fig. 7 est alors donnée par :

$$dq = Ne \stackrel{(5)}{=} ndVe \quad (6)$$

En substituant dans (6) l'expression (4) du volume dV , on obtient :

$$dq = ne\vec{v} \cdot d\vec{S}dt \quad (7)$$

Nous pouvons maintenant calculer l'intensité dI du courant traversant la surface dS :

$$dI = \frac{dq}{dt} \stackrel{(7)}{=} \frac{ne\vec{v} \cdot d\vec{S}dt}{dt} = ne\vec{v} \cdot d\vec{S}$$

D'où :

$$dI = ne\vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (8)$$

Le vecteur $ne\vec{v}$ a pour unité le $\text{C}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}) = \text{A}/\text{m}^2$. C'est une intensité par unité de surface, appelée **densité de courant** et notée $\vec{j}$:

$$\vec{j} = ne\vec{v} \quad (9)$$

On peut ainsi exprimer l'intensité (8) en termes de la densité de courant :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (10)$$

Il apparaît en (10) que l'intensité dI du courant traversant la surface infinitésimale dS est égale au *flux de la densité de courant* $\vec{j}$ à travers cette surface.

Dans le cas où les porteurs de charge ne sont pas des électrons mais des particules de charge q quelconque (de même vitesse $\vec{v}$), l'intensité dI à travers la surface dS donnée en (8) devient :

$$\boxed{dI = nq\vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S}} \quad (11)$$

Avec :

$$\vec{j} = nq\vec{v} \quad (12)$$

Pour calculer l'intensité I du courant traversant la surface macroscopique S , il faut effectuer l'intégrale de l'intensité dI sur toutes la surface S (cf. fig.10) :

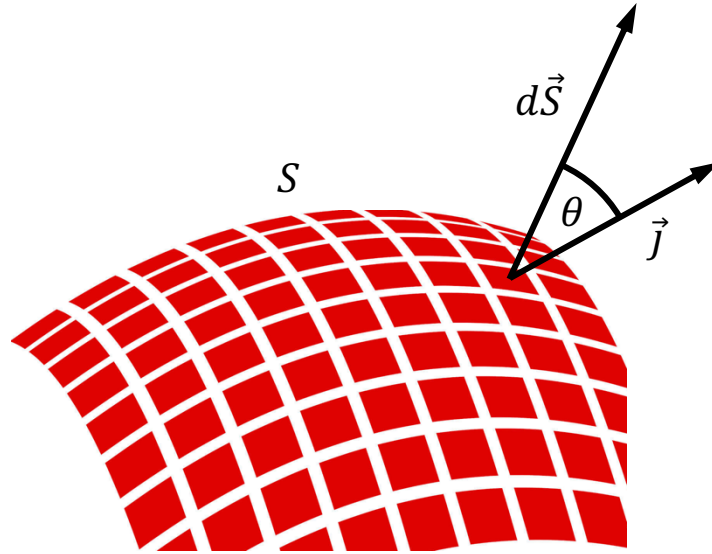


Fig. 10 : I s'obtient en intégrant $dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ sur toute la surface S .

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (13)$$

où $\vec{j} = nq\vec{v}$.

Nous voyons en (13) que la densité de courant $\vec{j} = nq\vec{v}$ est la grandeur microscopique et locale correspondant à l'intensité I du courant, une grandeur macroscopique et globale.

Dans un *conducteur*, la vitesse $\vec{v}$ dans (11) n'est autre que la *vitesse de dérive* $\vec{v}_d$ des électrons, définie en (3). On a donc :

$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (14)$$

Avec :

$$\vec{j} = ne\vec{v}_d \quad (15)$$

Appliquons le résultat général (13) au cas particulier d'un courant stationnaire et uniforme circulant dans un conducteur dont la section transversale au courant, notée S , est uniforme (un conducteur cylindrique par exemple) (cf. fig. ci-dessous).

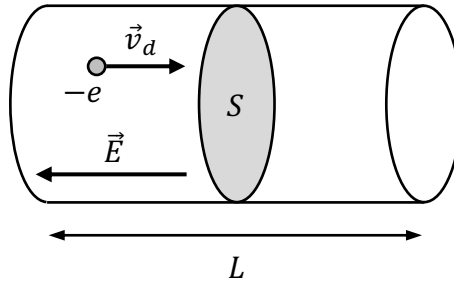


Fig. 11 : Courant stationnaire et uniforme dans un conducteur cylindrique soumis à un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme qui lui est parallèle.

(13) donne :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j dS = j \iint_S dS = jS = nev_d S$$

D'où¹¹ :

$$\boxed{I = jS = nev_d S} \quad (16)$$

3.2. Correspondance entre tension et champ électrostatique

Le champ électrostatique $\vec{E}$ est la grandeur microscopique correspondant à la tension ΔV . En effet, par définition de **l'énergie potentielle électrostatique**, on a¹² :

$$\Delta \mathcal{E}_{p.e} = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}_E(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (17)$$

Où :

- $\Delta \mathcal{E}_{p.e}$: variation d'énergie potentielle électrostatique d'une particule chargée dans un champ électrostatique $\vec{E}$, entre deux points A et B de vecteurs positions $\vec{r}_A$ respectivement $\vec{r}_B$
- $\vec{F}_E(\vec{r})$: force électrostatique subie par une particule située en $\vec{r}$
- $d\vec{r}$: déplacement infinitésimal de la particule

¹¹ Sur la Fig. 11, nous avons noté la charge de l'électron $-e$, où $e > 0$, pour attirer l'attention sur le fait que la charge est négative, raison pour laquelle les électrons se déplacent en sens opposé à celui du champ $\vec{E}$. Alors qu'en (16), nous avons utilisé la notation e , où $e < 0$, pour s'affranchir du signe négatif et ainsi alléger la notation.

¹² De manière générale, à toute force conservative correspond une énergie potentielle, laquelle est définie comme l'opposé du travail de cette force le long d'un chemin quelconque reliant deux points.

Remarque : Le membre de droite de (17) est l'opposé du travail de la force $\vec{F}_E$ le long d'un chemin quelconque reliant les deux positions $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$ de la particule.

Par définition du champ $\vec{E}$, celui-ci est lié à la force $\vec{F}_E$ par la relation :

$$\vec{F}_E = q\vec{E} \quad (18)$$

Où q est la charge de la particule.

En substituant (18) dans (17), on a :

$$\Delta\mathcal{E}_{p.e} = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} q\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (19)$$

D'où :

$$\frac{\Delta\mathcal{E}_{p.e}}{q} = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad (20)$$

Par définition, le membre de gauche de (20) est appelé **tension** entre les points A et B et noté ΔV . On a ainsi

$$\boxed{\Delta V = - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}} \quad (21)$$

Nous voyons en (21) que le champ électrostatique $\vec{E}$, est la grandeur microscopique et locale correspondant à la tension ΔV , une grandeur macroscopique et globale.

Appliquons le résultat général (21) au cas particulier d'un conducteur rectiligne de longueur L soumis à un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme qui lui est parallèle (cf. fig. 11).

(21) donne :

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - \int_{r_A}^{r_B} E dr \\ &= -E \int_{r_A}^{r_B} dr = -E(r_B - r_A) = -EL \end{aligned}$$

D'où :

$$\Delta V = -EL \quad (22)$$

Par la relation (18), on peut exprimer (22) en termes de la force F_E agissant sur chaque électron de charge $-e$ circulant dans le conducteur :

$$\Delta V = - \left(\frac{F_E}{-e} \right) L = \frac{F_E}{e} L$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta V = \frac{F_E}{e} L} \quad (23)$$

3.3. Interprétation microscopique de la loi d'Ohm

À partir des résultats (16) et (23), nous pouvons maintenant obtenir une interprétation microscopique de la loi d'Ohm.

Partons de la forme macroscopique de la loi d'Ohm :

$$\Delta V = RI$$

Substituons les résultats (16) et (23) :

$$\frac{F_E}{e} L = Rnev_d S$$

D'où :

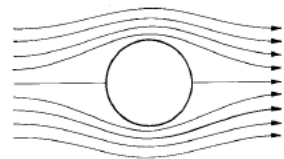
$$\boxed{F_E = \frac{RS}{L} ne^2 v_d} \quad (24)$$

Nous constatons dans (24) que la force F_E est *proportionnelle* à la vitesse v_d :

$$F_E = bv_d$$

où $b = (RS/L)ne^2$

On retrouve cette proportionnalité entre force et vitesse en mécanique des fluides, dans le cas d'un objet se déplaçant à vitesse v dans un fluide *en écoulement laminaire* (cf. fig. ci-contre). Dans ce cas, le fluide exerce sur l'objet une force de frottement F_f de la forme :



$$F_f = -kR\eta v \quad (25)$$

Où :

- F_f : force de frottement exercée par le fluide sur l'objet, en N
- v : vitesse de l'objet par rapport au fluide, en m/s
- k : coefficient de forme de l'objet, sans unité
- R : rayon maximal de l'objet, mesuré depuis l'axe de révolution, perpendiculairement à celui-ci, en m
- η : viscosité du fluide, en kg/(m·s)

Ici, le coefficient de proportionnalité entre la force et la vitesse est $b = kR\eta$, en N·s/m

Remarques :

- Le signe négatif dans (25) exprime le fait que le sens de la force de frottement subie par l'objet est opposé à celui de sa vitesse par rapport au fluide.
- (25) est valable pour un objet possédant une symétrie de révolution dont l'axe est parallèle à la vitesse de l'objet par rapport au fluide.

Par exemple, lorsque qu'une bille chute verticalement dans un fluide (en écoulement laminaire) sous l'effet de sa force de pesanteur F_p , elle finit par atteindre sa vitesse limite. Dès lors, sa vitesse de chute demeure constante et sa force de pesanteur est égale et opposée à la force de frottement qu'elle subit de la part du fluide : $F_p = -F_f = -bv$ (cf. Fig. 12).

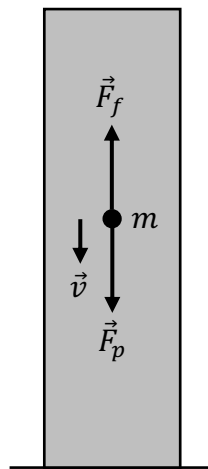


Fig. 12 : Bille en chute dans un fluide en écoulement laminaire. Une fois la vitesse limite atteinte, $\vec{F}_p = -\vec{F}_f = -b\vec{v}$.

Par analogie à cette situation, nous pouvons interpréter l'équation (24) de la manière suivante :

La circulation des électrons dans le conducteur s'apparente à un mouvement de particules dans un fluide *en écoulement laminaire*.

Ainsi, la force électrostatique F_E qui s'exerce sur chaque électron circulant à vitesse v_d dans le conducteur, s'oppose à la force de frottement laminaire F_f que ceux-ci subissent de la part du milieu conducteur (cf. Fig. 13) :

$$F_E = -F_f = -bv_d \quad (26)$$

Où :

- $b = (RS/L)ne^2$
- v_d : vitesse de dérive des électrons, définie en (3)

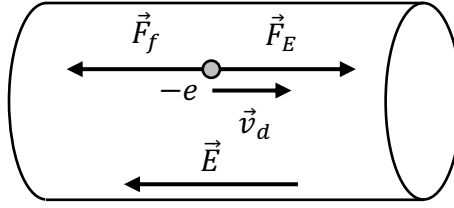


Fig. 13 : La force électrostatique $\vec{F}_E$ qui s'exerce sur chaque électron circulant à vitesse $\vec{v}_d$ dans le conducteur, s'oppose à la force de frottement laminaire $\vec{F}_f = -b\vec{v}_d$ que ceux-ci subissent de la part du milieu conducteur.

Telle est l'interprétation microscopique de la loi d'Ohm.

3.4. Analogie microscopique de la loi d'Ohm

En substituant dans la loi d'Ohm $\Delta V = RI$, l'expression (16) de l'intensité I et l'expression (22) de la tension ΔV , on obtient :

$$-EL = RjS \quad (27)$$

Soulignons le fait que le membre de droite de (27) est négatif. En effet, de l'équation (16), on a $j = nev_d$, où $e = -1,60 \cdot 10^{-19}$ C est la charge de l'électron, laquelle est négative. Par conséquent, j est négatif dans (27). Pour ne pas s'embarrasser du signe négatif apparaissant au membre de gauche de (27), nous allons plutôt noter $-e$ la charge de l'électron, où $e = +1,60 \cdot 10^{-19}$ C. De cette notation, il découle que nous devons remplacer j par $-j$ dans (27), ce qui donne $-EL = R(-j)S$, ou encore :

$$EL = RjS \quad (28)$$

D'où :

$$E = \frac{RS}{L} j \quad (29)$$

R , S et L étant des paramètres (macroscopiques) constants, l'équation (29) exprime une relation de proportionnalité entre les grandeurs microscopiques E et j . En notant $\rho \equiv RS/L$, l'équation (29) s'écrit :

$$\boxed{E = \rho j} \quad (30)$$

L'équation (30) est l'analogie microscopique et local de la loi d'Ohm, aussi appelée **loi d'Ohm locale**. Le coefficient de proportionnalité ρ est appelé **résistivité** du matériau, et sa valeur est donnée dans les tables pour différents matériaux.

4. Du microscopique au macroscopique : relation tension-intensité pour une ampoule à incandescence

4.1. Exposé de la démarche

Nous considérons maintenant la relation *non linéaire* entre la tension et l'intensité du courant circulant dans une ampoule à incandescence (cf. Fig. 2).

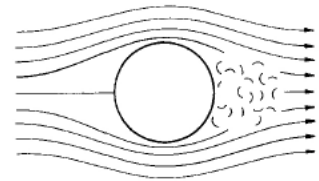
Nous admettons à nouveau que :

- le filament de l'ampoule (le conducteur métallique) est un cylindre de section S et de longueur L
- le conducteur est soumis à un champ électrostatique $\vec{E}$ uniforme qui lui est parallèle en tout point¹³

Pour obtenir cette relation (non linéaire) entre la tension ΔV et l'intensité I , nous allons adopter la démarche inverse à celle qui nous a permis d'obtenir l'interprétation microscopique de la loi d'Ohm à la section 3 ; c'est-à-dire qu'à partir d'une hypothèse microscopique concernant les porteurs de charge, nous en déduirons les conséquences macroscopiques.

4.2. L'hypothèse microscopique

En mécanique des fluides, rappelons qu'en plus du régime laminaire dont il a été question à la section 3, il existe un régime *turbulent*. Celui-ci concerne les vitesses élevées. Dans ce cas, les trajectoires des particules du fluide (observées dans le référentiel de l'objet) ont l'allure représentée sur la figure ci-contre, où apparaissent des tourbillons derrière l'objet.



La force de frottement exercée par le fluide sur l'objet en mouvement croît avec la masse des tourbillons qui apparaissent derrière l'objet. La force de frottement est parallèle à la vitesse relative de l'objet et du fluide. Elle est donnée par :

$$\begin{aligned} F_f &= -\frac{1}{2}CS\rho v^2 \\ &= -\beta v^2 \end{aligned} \quad (31)$$

où $\beta \equiv \frac{1}{2}CS\rho$

- F_f : force de frottement exercée par le fluide sur l'objet, en N
- C : constante de proportionnalité qui dépend de la forme de l'objet, sans unité
- S : section apparente de l'objet (aire de sa projection sur un plan perpendiculaire à sa vitesse), en m^2
- ρ : masse volumique du fluide, en kg/m^3
- v : vitesse de l'objet par rapport au fluide, en m/s

¹³ Cette condition est satisfaite en soumettant les extrémités du filament à une différence de potentiel ΔV constante, quand bien même celui-ci est enroulé sur lui-même dans une ampoule électrique.

Remarques :

- Le signe négatif dans (31) exprime le fait que le sens de la force de frottement subie par l'objet est opposé à celui de sa vitesse par rapport au fluide.
- (31) est valable pour un objet possédant une symétrie de révolution dont l'axe est parallèle à la vitesse de l'objet par rapport au fluide.

Voici notre hypothèse microscopique concernant les électrons de conduction circulant dans le filament de l'ampoule, en régime non linéaire :

Hypothèse microscopique : La circulation des électrons s'apparente à un mouvement de particules dans un fluide *en écoulement turbulent*.

Autrement dit, la force électrostatique F_E qui s'exerce sur chaque électron circulant à vitesse v_d dans le filament, s'oppose à la force de frottement turbulent F_f que ceux-ci subissent de la part du milieu conducteur :

$$F_E = -F_f = -\beta v_d^2 \quad (32)$$

où v_d est la vitesse de dérive des électrons définie en (3), et β est un coefficient constant et positif.

4.3. Calcul de la relation tension-intensité pour une ampoule à incandescence

Partons de l'équation (32), en nous affranchissant du signe négatif du membre de droite, ce qui revient à ne considérer que l'égalité des normes des vecteurs F_E et F_f ¹⁴ :

$$F_E = \beta v_d^2 \quad (33)$$

Rappelons les relations entre les grandeurs microscopiques et leurs analogues macroscopiques, obtenues à la section 3.

En (23) nous avons obtenu :

$$\Delta V = \frac{F_E}{e} L$$

D'où :

$$F_E = \frac{e}{L} \Delta V \quad (34)$$

En (16), nous avons obtenu :

$$I = nev_d S$$

¹⁴ En général, $\vec{F}_E = -\vec{F}_f \Rightarrow \|\vec{F}_E\| = \|\vec{F}_f\|$, ce qui, en 1 dimension, se note $|F_E| = |F_f|$, ou encore $F_E = F_f$.

D'où :

$$v_d = \frac{I}{neS} \quad (35)$$

En substituant (34) et (35) dans l'équation (33), on a :

$$\frac{e}{L} \Delta V = \beta \left(\frac{I}{neS} \right)^2 = \frac{\beta}{(neS)^2} I^2 \quad (36)$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\Delta V = \frac{\beta L}{e^3 (nS)^2} I^2} \quad (37)$$

Nous avons ici obtenu l'équation recherchée, elle est de la forme :

$$\Delta V = AI^2 \quad (38)$$

Où $A \equiv \beta L / (e^3 (nS)^2)$.

Ainsi, notre hypothèse microscopique émise à la section 4.2 a pour conséquence macroscopique l'équation (37). Celle-ci nous apprend que la tension aux bornes d'une ampoule à incandescence est un *polynôme de degré 2* de l'intensité du courant qui la traverse.

4.4. Analogie microscopique de la relation tension-intensité en régime non linéaire

De même que nous avons obtenu à la section 3 l'analogie microscopique de la loi d'Ohm, appelée loi d'Ohm locale, nous allons ici exprimer l'analogie microscopique de la relation tension-intensité en régime non linéaire, en termes du champ E et de la densité de courant j . Il suffit pour cela de partir de l'équation (33) :

$$F_E = \beta v_d^2$$

Avec $F_E \stackrel{(18)}{=} eE$ et $j \stackrel{(15)}{=} nev_d$, on a :

$$eE = \beta \left(\frac{j}{ne} \right)^2$$

D'où :

$$\boxed{E = \frac{\beta}{e^3 n^2} j^2} \quad (39)$$

β , e et n étant des paramètres constants, l'équation (39) exprime une relation de proportionnalité entre les grandeurs microscopiques E et j^2 . En notant $\varphi \equiv \beta/(e^3 n^2)$, l'équation (39) s'écrit :

$$\boxed{E = \varphi j^2} \quad (40)$$

L'équation (40) est l'analogue microscopique et local de la relation tension-intensité en régime non linéaire, donnée par l'équation (37).

Nous voyons que le coefficient A de la relation macroscopique (38) et le coefficient φ de la relation microscopique (40) sont liés par la relation :

$$A = \varphi \frac{L}{S^2} \quad (41)$$

5. Ajustement de la courbe théorique aux mesures

Il s'agit maintenant de confronter notre résultat théorique (37) à des mesures.

Sur un graphique représentant la tension ΔV en fonction de l'intensité I pour une ampoule à incandescence en régime non linéaire, la courbe correspondant à la relation (37) est une *parabole* (cf. Fig. 13).

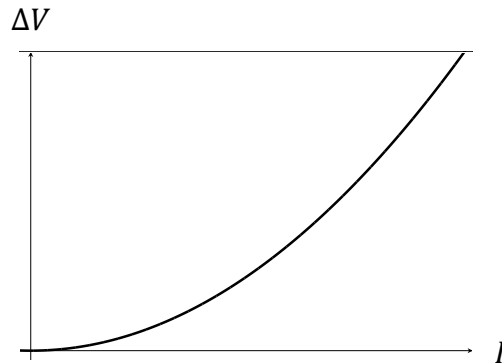


Fig. 13 : Pour une ampoule à incandescence en régime non linéaire, la représentation graphique de la tension en fonction de l'intensité que prédit théoriquement l'équation (37) est une *parabole*, de la forme $\Delta V = AI^2$.

Nous allons donc ajuster une parabole aux points du graphique de la Fig. 2 dans sa partie non linéaire (pour $I > 50$ mA), et une droite dans sa partie linéaire (pour $I < 50$ mA). Ces ajustements sont représentés sur la Fig. 14.

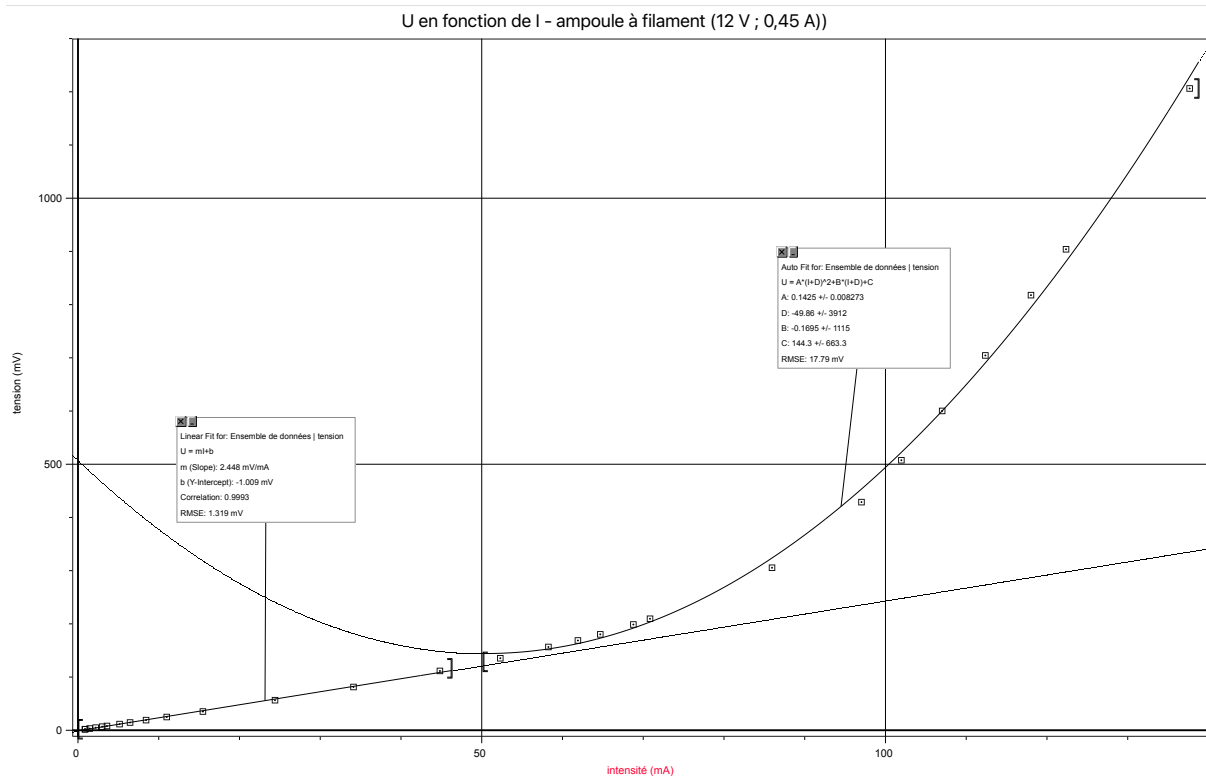


Fig. 14 : Ajustement d'une parabole aux points du graphique de la Fig. 2 dans sa partie non linéaire, et d'une droite dans sa partie linéaire.

Remarquons que pour $I < 50$ mA, le filament est un conducteur ohmique. Dans cette plage en effet, la tension augmente linéairement avec l'intensité. Cela s'explique par le fait que l'élévation de température du conducteur est suffisamment faible entre 0 et 50 mA pour ne pas affecter sa propriété ohmique. D'après la pente de la droite ajustée, la résistance (constante) du conducteur vaut $R = 2,4 \Omega$.

Pour $I > 50$ mA, nous observons un ajustement très satisfaisant de la parabole (la courbe théorique) aux points de mesures. Pour estimer quantitativement la qualité de cet ajustement, on calcule la racine de l'écart quadratique moyen (RMSE) normalisé, noté NRMSE. Il s'agit d'une mesure statistique utilisée pour évaluer la performance d'un modèle théorique.

En choisissant pour normalisation l'amplitude des données $y_{\max} - y_{\min}$, la NRMSE est donnée par :

$$\text{NRMSE} = \frac{\text{RMSE}}{y_{\max} - y_{\min}}$$

D'après le graphique on a :

- $\text{RMSE} \cong 18 \text{ mV}$
- $y_{\max} - y_{\min} = \Delta V_{\max} - \Delta V_{\min} \cong 1200 \text{ mV} - 100 \text{ mV} = 1100 \text{ mV}$

On a donc :

$$\text{NRMSE} \cong \frac{18 \text{ mV}}{1100 \text{ mV}} = 0,016 = 1,6 \%$$

Ainsi, cette NRMSE inférieure à 2 % traduit un très bon ajustement de la courbe théorique (la parabole) aux points de mesures.

6. Définition généralisée de la résistance

Nous pouvons à présent généraliser la définition de la résistance au régime non linéaire.

En régime linéaire, rappelons que la *définition* de la résistance R est donnée par $R = \Delta V / I$. En notant $U \equiv \Delta V$, on a :

$$R = \frac{U}{I}$$

En régime non linéaire, nous *définissons* la résistance R par :

$$R = \lim_{\Delta I \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta I} \equiv \frac{dU}{dI} \quad (42)$$

R n'est autre que la dérivée de la tension U par rapport à l'intensité I .

En appliquant cette définition à l'expressions (38) de la tension en régime non linéaire, on obtient :

$$R = \frac{d}{dI} (AI^2) = 2AI \quad (43)$$

D'où :

$$\boxed{R(I) = 2AI} \quad (44)$$

Où $A = \beta L / (e^3 (nS)^2) \stackrel{(41)}{=} \varphi L / S^2$.

Ainsi, en régime non linéaire, la résistance R d'un conducteur métallique est *proportionnelle* à l'intensité I du courant qui le traverse. La représentation graphique de la résistance en fonction de l'intensité est donc une droite (cf. Fig. 15).

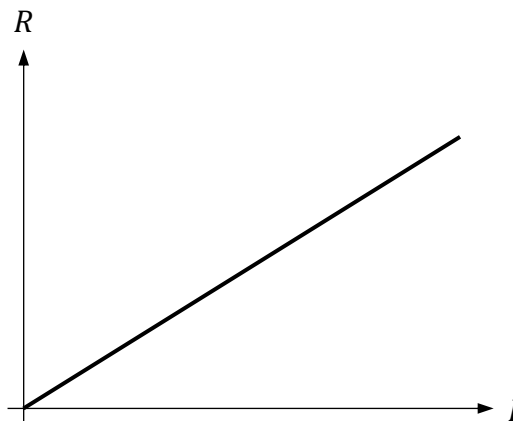


Fig. 15 : Pour une ampoule à incandescence en régime non linéaire, la représentation graphique de la résistance en fonction de l'intensité que prédit théoriquement l'équation (44) est une *droite*, de la forme $R(I) = 2AI$.

7. Récapitulation des résultats

Les résultats obtenus dans cette étude sont récapitulés dans le tableau ci-dessous :

	ÉLECTROKINÉTIQUE			MÉCANIQUE DES FLUIDES	
Régime	Loi globale	Loi locale	Relation coefficients global-local	Loi microscopique	Coefficient microscopique
linéaire	$\Delta V = RI$	$E = \rho j$	$R = \frac{L}{S} \rho$	$F_E = b v_d$	$b = \frac{S n e^2}{L} R$
non linéaire	$\Delta V = A I^2$	$E = \varphi j^2$	$A = \frac{L}{S^2} \varphi$	$F_E = \beta v_d^2$	$\beta = \frac{(S n)^2 e^3}{L} A$

Remarques :

- Dans chaque ligne du tableau, nous avons encadré en gras la loi à partir de laquelle nous avons obtenu tous les autres résultats de la même ligne. Il s'agit de la loi d'Ohm (une loi empirique de l'électrocinétique) pour le régime linéaire, et de la loi de force de frottement en régime turbulent (une loi empirique de la mécanique des fluides) pour le régime non linéaire, que nous avons admise comme hypothèse microscopique.
- La colonne « Relation coefficients global-local » donne la relation entre le coefficient constant de la loi globale et celui de la loi locale correspondante de l'électrocinétique : R et ρ pour le régime linéaire et A et φ pour le régime non linéaire.
- La colonne « Coefficient microscopique » donne la relation entre le coefficient constant de la loi de force de frottement de la mécanique des fluides et celui de la loi globale correspondante de l'électrocinétique : b et R pour le régime linéaire et β et A pour le régime non linéaire.

8. Méthode expérimentale pour déterminer la valeur du paramètre microscopique φ

Rappelons que dans le cas d'un conducteur ohmique (régime linéaire), on a $\rho = RS/L$ (cf. équations (29) et (30)), où le coefficient microscopique ρ , appelé résistivité, est donné dans les tables pour différents matériaux et caractérise ces derniers. Par exemple, pour le cuivre, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot m$.

À partir de la résistivité d'un matériau, on peut calculer la *résistance* d'un échantillon macroscopique de ce même matériau par la relation $R = \rho L/S$, en ayant préalablement mesuré la longueur L et la section S de l'échantillon.

En régime *non linéaire*, c'est le coefficient φ qui détermine la relation tension-intensité d'un conducteur, et caractérise le matériau dont il est constitué (cf. équations (38), (40) et (41)). Cependant, la valeur du coefficient φ pour différents matériaux n'est (à notre connaissance) pas donnée dans les tables. C'est pourquoi nous proposons ici une méthode expérimentale pour la déterminer :

- a) Choisir un conducteur métallique constitué d'un matériau connu (par exemple le tungstène, souvent utilisé pour la confection des filaments des ampoules à incandescence).
- b) Mesurer la longueur L et la section S de ce conducteur.
- c) Obtenir le nombre n de porteurs de charge par unité de volume (la densité d'électrons libres) de ce matériau. Cette grandeur doit être connue, d'une manière ou d'une autre ! Par exemple, pour le tungstène, la densité d'électrons libres vaut $n = 6,3 \cdot 10^{28} m^{-3}$.
- d) Effectuer une série de mesures de la tension ΔV en fonction de l'intensité I traversant le conducteur en régime non linéaire, puis tracer un graphique similaire à celui de la Fig. 2.
- e) Ajuster la courbe théorique ($\Delta V = AI^2$) à ce graphique puis en déduire la valeur du paramètre d'ajustement A , comme effectué sur le graphique de la Fig. 14.
- f) À partir de la relation $A = \varphi L/S^2$ (cf. équations (41)), calculer finalement $\varphi = (S^2/L)A$.

Une fois le coefficient φ obtenu, on en déduit le paramètre $\tilde{A}$ pour *tout autre échantillon* constitué de ce *même matériau* mais de longueur quelconque notée $\tilde{L}$, et de section quelconque notée $\tilde{S}$, toutes deux ayant été préalablement mesurées. On calcule le paramètre $\tilde{A}$ pour cet autre échantillon avec l'équation (41) : $\tilde{A} = \varphi \tilde{L}/\tilde{S}^2$.

On peut alors calculer pour cet autre échantillon en régime non linéaire, l'intensité I pour toute valeur de la tension ΔV à laquelle il est soumis, ou inversement, avec la relation (38) : $\Delta V = \tilde{A}I^2$.

9. Conclusion

Nous avons montré à la section 3 qu'en *régime linéaire* (conducteur ohmique), la relation linéaire entre les grandeurs *macroscopiques* ΔV et I observée expérimentalement ($\Delta V = RI$), correspond à une relation linéaire entre les grandeurs *microscopiques* F_E et v_d , de la forme $F_E = bv_d$, caractérisant un écoulement laminaire en mécanique des fluides.

Quoi de plus naturel en effet que de *supposer* qu'en *régime non linéaire*, la relation non linéaire entre les grandeurs *macroscopique* ΔV et I observée expérimentalement, correspond à la relation non linéaire entre les grandeurs *microscopiques* F_E et v_d , de la forme $F_E = \beta v_d^2$, caractérisant un écoulement turbulent en mécanique des fluides. De cette hypothèse microscopique, nous en avons déduit à la section 4 la relation non linéaire recherchée entre ΔV et I , donnée par l'équation (37) : $\Delta V = AI^2$, où $A = \beta L / (e^3 (nS)^2)$.

À la section 5, en ajustant la courbe théorique obtenue - une parabole - à une série de mesures représentées graphiquement pour un conducteur métallique en régime non linéaire, nous obtenons un très bon résultat. En effet, la racine de l'écart quadratique moyen normalisé (NRMSE) de cet ajustement est inférieure à 2 %.

La qualité de cet ajustement confère, d'une part, une grande fiabilité à l'expression théorique (37) que nous avons obtenue pour la relation tension-intensité d'un conducteur métallique en régime non linéaire. D'autre part, elle confirme le bien-fondé de l'hypothèse microscopique que nous avons imaginée à la section 4 pour un tel conducteur.

La démarche employée dans cette étude qui nous a conduit à la solution recherchée, a consisté à exploiter la correspondance entre les régimes laminaire et turbulent de la mécanique des fluides, et les régimes linéaire et non linéaire de l'électrocinétique. Sur le plan formel, cette correspondance apparaît clairement dans le tableau récapitulatif de la section 7.

Terminons cette étude par un commentaire concernant le graphique de la Fig. 2 (et de la Fig. 14). Les mesures y sont suffisamment nombreuses à faibles intensités pour faire apparaître la transition entre le régime linéaire et le régime non linéaire, en $I \cong 50$ mA. En mécanique des fluides, cela correspond à la transition entre l'écoulement en régime laminaire et celui en régime turbulent.